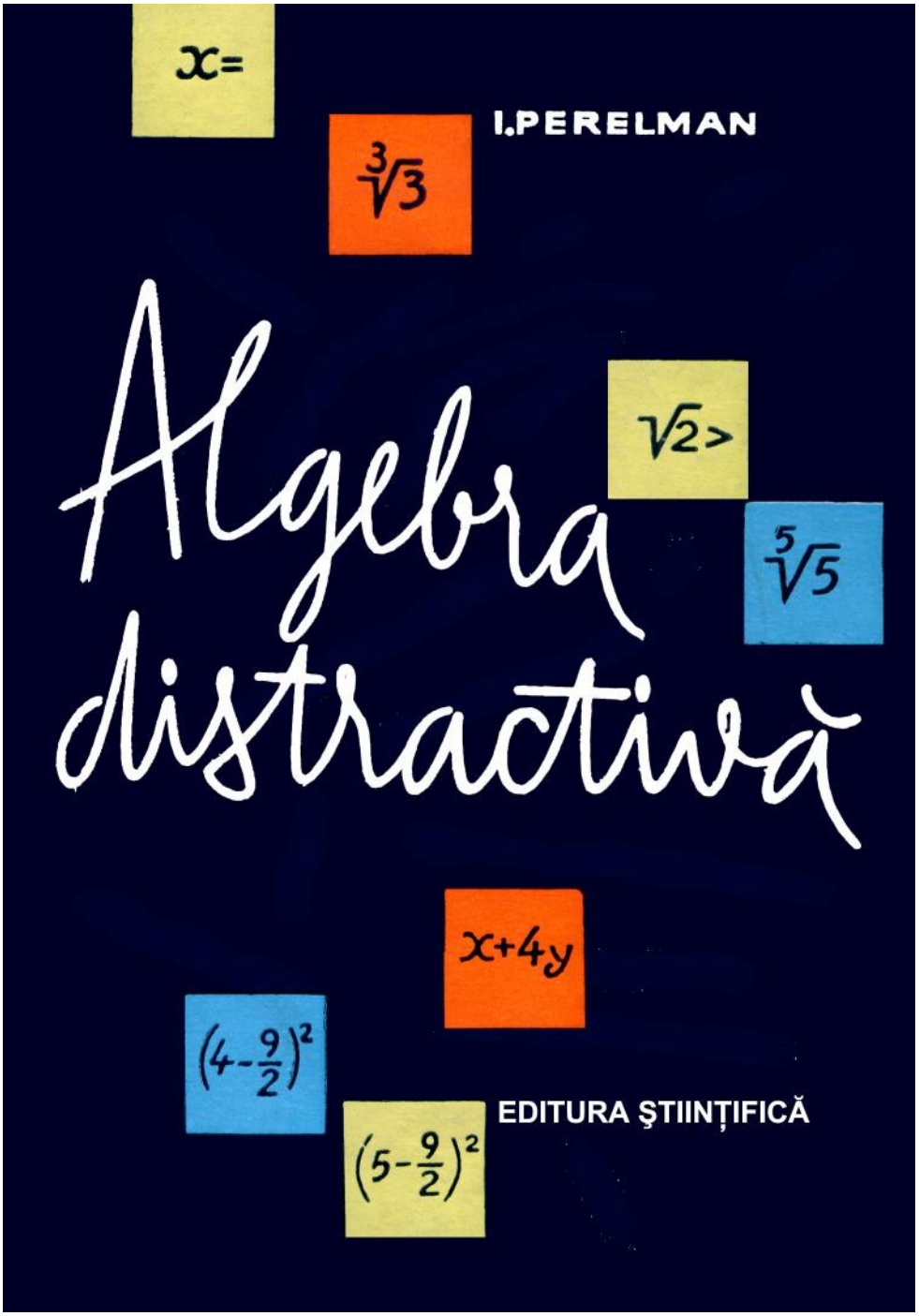


În ronlâneştc de: Cartenco Teofăna, V. Suciii şi M. Stoka i. I. Perelmâh

ALGEBRA DISTRACTIVĂ

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ Bucureşti, 19G1

DIN PREFAŢA AUTORULUI LA EDIŢIA a III-a

Cartea de faţă nu trebuie privită ea un manual de algebră uşor de înţeles, destinat începătorilor. Ca şi celelalte lucrări ale mele din acelaşi ciclu, Algebra distractivă nu

este un manual, ci o carte de lectură liberă. Cititorii cărora li se adresează trebu ie să posede an u mite cunoştinţe de algebră, măcar vag însuşite sau pe jumătate uitate. Al g e b r a d i s- t r a c ti v ă îşi propune ca scop să precizeze, să reîmprospăteze şi să f ixeze aceste cunoştinţe disparate şi nesigure şi, mai ales, să dezvolte cititorilor gust ul pentru algebră, să trezească în ei dorinţa de a-şi completa, în mod independent, cu ajutorul manualelor de specialitate, golurile existente în pregătirea lor. În această privinţă, orientarea Algebrei distra c- tive este opusă obiectivelor urmărite de cărţi ca, de exemplu, Numere şi figuri de Rademacher şi Toeplitz – carte care nu cere cititorilor „să ţină minte ceea ce au învăţat la matematică în anii adolescenţei'". Cartea mea, dimpotrivă, tinde să ajute la fixarea cunoştinţelor şi deprinderilor căpătate în şcoală.

Pentru a atribui acestui obiect nu caracter atrăgător şi a trezi interesul cititorilor, am folosit în cartea mea diferite ■mijloace, ca: probleme cu subiecte neobişnuite, care trezesc curiozitate, excursii distractive în domeniul istoriei şi matematicii, aplicaţii neaşteptate ale algebrei în viaţa practică etc.

Din punct de vedere al materialului de algebră conţinut, cartea nu iese din cadrul programei şcolare, atingând aproape toate, capitolele ei. Ţinând seama (le scopul pe care-l are, Algebra distractivă evită problemele teoretice complicate.

CAPITOLUL I

A CIXCEA OPERAŢIE MATEMATICĂ

*

A ducea operaţie

Algebra este adesea denumită „aritmetica celor şapte operaţii", pentru a sublinia că la cele patru operaţii matematice cunoscute ea adaugă încă trei: ridicarea la putere şi cele două operaţii inverse acesteia din urmă.

Convorbirile noastre despre algebră le vom începe cu cea de-a „eineea operaţie" – ridicarea la putere.

Oare necesitatea acestei noi operaţii a fost dictată de practică? Indiscutabil. De ea ne izbim foarte des în viaţa de toate zilele. Să ne amintim numai de calculul suprafeţelor şi volumelor când trebuie să ridicăm diferite numere la puterea a doua (la pătrat) şi a treia (la cub). În afară de aceasta, forţa de atracţie universală, interacţiunile electrostatice şi cele magnetice, intensitatea luminii şi a sunetului scad proporţional cu pătratul distanţei. Între timpul de rotaţie a planetelor în jurul Soarelui (şi a sateliţilor în jurul planetelor) şi distanţele măsurate de la centrul de rotaţie există, de asemenea, o relaţie exprimată cu ajutorul puterilor: pătratele timpurilor de revoluţie sunt proporţionale cu cuburile distanţelor.

Dar să nu ne închipuim că în practică întâlnim numai puterile a doua şi a treia, iar exponenţii de grad superior există numai în exerciţiile din manualele de algebră. Efec- tuând calculele de rezistenţă, un inginer se izbeşte la orice pas de puterea a patra, iar în alte cazuri – de pildă la aflarea diametrului unei conducte de abur – chiar de puterea a şasea. Analizând forţa cu care o apă curgătoare antrenează

pietrele întâlnite în calea ei, un hidrotehnician întâlneşte mărimi ridicate la puterea a şasea: dacă viteza curentului de apă a unui râu este de patru ori mai mare decât a altui râu, atunci primul este capabil să rostogolească prin albia sa pietre mai grele de 46 ori, adică de 4 096 de ori, faţă de cel de-al doilea râu *.

Cu exponenţii mai mari ne întâlnim studiind variaţia strălucirii unui corp incandescent – de pildă, a filamentului uârni bec electric – în funcţie de temperatură. La incandescenţa de culoare albă-gălbuie, intensitatea luminoasă creşte proporţional cu puterea a 12-a a temperaturii, iar la incandescenţa de culoare roşie – proporţional cu puterea a 30-a a temperaturii (se înţelege că este vorba de temperatura „absolută”, adică socotită de la —273°C). Aceasta înseamnă că, atunci când mărim temperatura unui corp, de exemplu de la 2 000° la 4 000°, adică de două ori, corpul dat devine de 212 ori mai strălucitor, cu alte cuvinte luminează de 4 000 de ori mai mult. Vom reveni asupra importanţei folosirii acestei dependenţe în tehnica fabricării becurilor electrice.

Numere astronomice

Se poate spune că astronomii sunt cei care folosesc pe scara cea mai largă cea de-a cincea operaţie. Cercetătorii universului au de-a face la orice pas cu numere uriaşe, compuse din una sau două cifre semnificative, urmate de un şir lung de zerouri. Scrierea obişnuită a acestor coloşi numerici, denumiţi pe drept cuvânt „numere astronomice”, ar duce inevitabil la mari complicaţii, mai ales în cazul efectuării calculelor. Astfel, distanţa de la Pământ la nebuloasa din Andromeda, exprimată în kilometri şi scrisă în mod obişnuit, arată astfel:

9 500 000 000 000 000 000 km.

Dar la efectuarea calculelor astronomice se cere adesea ca distanţele să fie exprimate nu în kilometri sau în unităţi mai mari, ci în centimetri. În acest caz, distanţa de mai sus va fi redată printr-un număr care are cu 5 zerouri mai mult:

950 000 000 000 000 000 000 000.

* Mai detaliat despre această problemă, vezi cartea mea Zanimatel- naia mehanika (Mecanica distractivă), cap. IX.

Masele stelelor sunt exprimate prin numere şi mai mari, mai ales atunci când dorim să le exprimăm în grame, aşa cum se cere în numeroase calcule. Masa Soarelui în grame este egală cu:

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

E lesne de înţeles cât de complicată ar fi efectuarea calculelor cu ajutorul acestor numere uriaşe şi cât de uşor s-ar putea comite greşeli. Şi încă numerele citate mai sus nu sunt cele mai mari numere astronomice.

A cincea operaţie matematică permite o rezolvare simplă a problemei. Cifra unu urmată de un şir de zerouri reprezintă o anumită putere a numărului 10:

100= IO2, 1 000 = IO3, 10 000 = 101 etc.

Deci, coloşii numerici de mai sus pot fi reprezentaţi sub forma următoare:

primul 950. IO21

al doilea 1 983. IO30

Această reprezentare se face nu numai pentru economisirea spaţiului, ci şi pentru simplificarea calculelor. Dacă ni s-ar cere să înmulţim aceste numere între ele, ar fi suficient să aflăm produsul 950 • 1 983 = 1 883 850 şi să-l punem înaintea factorului 1021+30 = IO51:

950 • IO21 • 1 983 • IO30 = 188 385 • IO52

Această notaţie este, desigur, mult mai comodă decât aceea în care am scrie numărul cu 21 de zerouri, apoi cel cu 30 şi, în sfârşit, numărul rezultant cu 52 de zerouri. Este nu numai mai comod, ci şi mult mai sigur, deoarece la scrierea a zeci de zerouri se poate omite unul sau două dintre ele, obţinându-se astfel un rezultat greşit.

Cât cântăreşte tot aerul care înconjoară Pământul?

Ca să ne convingem în ce măsură se simplifică calculele atunci când ne folosim de reprezentarea numerelor mari cu ajutorul puterilor lui 10, să facem următorul calcul: să determinăm de câte ori masa globului terestru este mai mare decât masa stratului de aer care îl înconjoară?

Ştim că pe fiecare centimetru pătrat din suprafaţa Pământului, aerul apasă cu o forţă de aproximativ un kilogram. Aceasta înseamnă că greutatea întregii coloane de aer care se sprijină pe 1 om2 din suprafaţa Pământului este egală cu 1 kg. Atmosfera care înconjoară Pământul poate fi considerată ca fiind compusă din asemenea coloane de aer; există atâtea coloane câţi centimetri pătraţi sunt cuprinşi în suprafaţa planetei noastre, deci tot atâtea kilograme cântăreşte întreaga atmosferă. Cercetând manualele, aflăm că suprafaţa globului terestru este egală cu 510 000 000 km2, ceea ce înseamnă 51 ■ 107 km2.

Să calculăm câţi centimetri pătraţi sunt cuprinşi într-un kilometru pătrat. Un kilometru liniar are 1 000 m, un metru – 100 cm, deci, 1 km liniar este egal cu IO5 cm, iar 1 km2 are (IO5)2 = 1010 cm2. Prin urmare, suprafaţa Pământului este de:

51 • IO7 • 1C10 = 51 • IO17

cm2. Tot atâtea kilograme cântăreşte şi întreaga atmosferă a Pământului. Transformând acestea în tone, obţinem:

51 • 1017: 1 000 = 51 • 1017: IO3 = 51 ■ 1017“3 = 51 • 1011.

Masa globului pământesc se exprimă prin numărul: o • io21 t.

Ca să aflăm de câte ori planeta noastră este mai grea decât stratul de aer ce o înconjoară, facem împărţirea:

6 • 1021: 51 • 1014=s IO6, adică masa atmosferei reprezintă aproximativ o milionime din masa globului pământesc *.

Ardere fără flacără şi fără căldură

Dacă veţi întreba un chimist de ce lemnul şi cărbunele ard numai la temperaturi înalte, vă va răspunde că de fapt combinarea oxigenului cu carbonul poate avea loc la

* Semnul înseamnă aproximativ egal, orice temperatură, dar că la temperaturi joase acest proces decurge foarte lent (adică în reacţie intră un număr neînsemnat de molecule) el scapă observaţiei noastre. Legea care determină viteza reacţiilor chimice arată că, atunci când temperatura scade cu 10°, viteza de reacţie (numărul de molecule cuprinse în aceasta) se reduce la jumătate.

Să aplicăm cele de mai sus la reacţia oxidării lemnului, adică la procesul de ardere a lemnului. Să presupunem că nu gram de lemn arde la temperatura de 000° a unei flăcări, în timp de o secundă. În cât timp va arde un gram de lemn la temperatura de 20°"! La această temperatură, care este cu 580 = 58 • 10° mai mică, viteza reacţiei va scădea de

258 ori, deci, un gram de lemn va arde în timp de 258 secunde.

Cu câţi ani este egal acest interval de timp? Putem calcula acest lucru cu aproximaţie, fără să înmulţim 2x2 de 57 de ori, şi fără ajutorul tabelelor de logaritmi. Yom folosi faptul că

210 = 1 024 ^ IO3.

Deci:

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

adică circa – dintr-un trilion de secunde. Un an are circa

4

30 000 000 sau 3 • 107 secunde, de aceea $\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : (3 \cdot 10^7) =$

$$= \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10} \text{ ani.}$$

Zece miliarde ani! Iată în cât timp ar arde un gram de lemn fără flacără şi fără căldură.

Aşadar, lemnul şi cărbunele ard şi la temperaturi obişnuite, fără să fie aprinse. Inventarea uneltelor pentru producerea focului a accelerat de miliarde de ori acest proces extrem de lent,

Schimbarea timpului l’roblemă

Yom caracteriza vremea numai după un singur criteriu, şi anume dacă cerul este sau nu acoperit, adică vom face deosebirea numai între zilele senine şi cele

înnorate. Ce părere aveţi, în aceste condiţii, sunt oare posibile multe săptămâni în care alternarea zilelor senine cu cele înnorate să nu fie niciodată aceeaşi?

S-ar părea că nu sunt prea multe, că vor trece vreo două luni şi că toate combinaţiile de zile senine şi înnorate vor fi epuizate; atunci, în mod inevitabil se va repeta una din combinaţiile care a avut loc înainte.

Să încercăm, totuşi, să calculăm precis câte combinaţii diferite sunt posibile în condiţiile date. Aceasta este una din problemele care conduc în mod neaşteptat la a cineea operaţie matematică. Prin urmare, în câte feluri pot alterna, în cursul unei săptămâni, zilele senine cu cele înnorate?

1

Rezolvare

Prima zi din săptămână poate fi senină sau înnorată: deci avem deocamdată două „combinaţii”.

În decurs de două zile sunt posibile următoarele alternări de zile senine cu cele înnorate:

senină şi senină, senină şi înnorată, înnorată şi senină, înnorată şi înnorată.

Deci 22 alternări diferite. În decurs de trei zile, la fiecare din cele patru combinaţii de mai sus le vor corespunde câte două posibilităţi pentru ziua a treia; în total vom avea un număr de alternări egal cu:

,22 • 2 = 23.

În decurs de patru zile, numărul alternărilor va fi:

23 • 2 = 24.

În cinci zile sunt posibile 2®, în şase zile, 2® şi, în sfârşit, în decurs de o săptămână, 27 – 128 alternări diferite.

De aci reiese ea există 128 de săptămmi cu ordine diferită de alternare a zilelor senine cu cele înnorate. Peste 128 -7 = 896 zile trebuie neapărat să se repete una din combinaţiile care au avut loc înainte. Repetarea poate să se întâmple şi mai eu rin d, dar 896 de zile reprezintă termenul la expirarea căruia această repetare este inevitabilă. Şi invers: pot să treacă doi ani întregi, chiar mai mult (2 ani şi 166 de zile), în decursul cărora nicio săptămână nu va semăna cu alta din acest punct de vedere.

Broasca cu cifru

Problemă

„•

într-o instituţie sovietică s-a descoperit o casă de bani care exista încă dinaintea Revoluţiei. S-a găsit şi cheia ei, dar pentru a o deschide trebuia cunoscut secretul broaştei, deoarece uşa casei de fier se deschidea numai atunci când cele cinci

discuri, pe care erau gravate literele alfabetului (36 de litere), erau astfel aşezate încât aceste litere să formeze un anumit cuvânt. Deoarece nimeni nu cunoştea cuvântul ce trebuia format, pentru a se evita spargerea casei, s-a hotărât să fie încercate toate combinaţiile de litere posibile de pe cele cinci discuri. Pentru formarea unei combinaţii erau necesare 3 secunde.

Exista oare speranţa ca această casă de fier să fie deschisă în următoarele zece zile?

Rezolvare

Să calculăm câte combinaţii de litere trebuiau încercate.

Fiecare din cele 36 de litere de pe primul disc poate fi combinată cu fiecare din cele 36 litere de pe discul al doilea. Deci, sunt posibile:

36 • 36 = 362

combinaţii de două litere.

Fiecăreia din aceste combinaţii i se poate adăuga oricare din cele 36 de litere de pe discul al treilea. De aceea, numărul combinaţiilor de trei litere va fi:

362 • 36 = 363.

În acelaşi mod, aflăm ca numărul combinaţiilor de 4 litere poate fi 364, iar de 5 litere – 365, sau 60 466 176. Pentru a forma aceste peste 60 milioane de combinaţii, ar fi necesar un interval de timp (socotind câte 3 secunde pentru fiecare combinaţie) de

3 • 60 466 176 = 181 398 528

sec. Aceasta reprezintă 50 000 ore sau circa 6 300 zile lucrătoare de câte 8 ore, adică peste 20 de ani.

Există şanse doar 10 la 6 300, sau 1 la 630, pentru ca în următoarele 3 0 zile casa de fier să fie deschisă. Aceasta reprezintă o probabilitate foarte mică.

Ciclistul superstiţios

Problemă

Cineva şi-a cumpărat o bicicletă, în dorinţa de a învăţa să meargă pe ea. Proprietarul bicicletei s-a dovedit a fi un om extrem de superstiţios. Auzind că o bicicletă se poate avaria astfel încât o roată să se deformeze într-un „opt”, el s-a gândit că nu-i va merge bine dacă în numărul lui de circulaţie va figura măcar o singură cifră 8. Mergând să obţină numărul, el raţiona în felul următor: în scrierea oricărui număr pot figura 10 cifre: 0,1… 9. Dintre acestea, cea cu ghinion este numai cifra 8. Există deci doar o singură şansă la zece ca numărul bicicletei să fie „cu ghinion”.

Este just acest raţionament?

Rezolvare

Numerele de bicicletă sunt formate din şase cifre. În total există 999 999 numere: de la 000001, 000002 etc. Până la 999 999. Să calculăm câte „numere fericite” există. Prima cifră poate fi oricare dintre cele nouă „fericite”: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. A doua cifră poate fi, de asemenea, – oricare din aceste 9 cifre. De aceea există 9 • 9 = 92 corn binaţii de două cifre „fericite”.

În acelaşi mod aflăm că numărul combinaţiilor „fericite” formate din 6 cifre este egal cu 96. Dar, ţinând seama că în acest număr intra şi combinaţia 000 000, care nil poate fi considerată ca număr de bicicletă, vom avea în total 96 – 1 = 531 440 numere „fericite”, ceea ce constituie cam 53 % din numărul total şi nu 90 % – aşa cum îşi închipuia biciclistul.

Propunem ca cititorul să se convingă personal că printre numerele formate din 7 cifre, există mai multe numere „cu ghinion” decât numere „fericite”.

Rezultalele dublării repetate

Cunoscuta legendă despre răsplata cuvenită inventatorului jocului de şah * ne oferă un exemplu caracteristic de creştere extrem de rapidă a unei cantităţi foarte mici, în cazul dublării ei repetate. Fără să mă opresc la acest exemplu clasic, voi da alte exemple, mai puţin cunoscute.

Problemă în medie, paramecium se divide în două la fiecare de ore. Dacă toţi indivizii rezultaţi ar rămâne în viaţă, cât timp ar fi necesar ca urmaşii unui paramecium să ocupe un volum egal cu volumul Soarelui 1

Datele necesare pentru calcul: admiţând că toate generaţiile rămân în viaţă după divizare, a 40-a generaţie a unui paramecium ocupă un volum de 1 m3; volumul Soarelui este egal cu 1027 m3.

Rezolvare

Problema se reduce la a determina de câte ori trebuie dublat 1 m3 pentru a se obţine un volum de IO27 m3. Facem următoarea transformare, tinând seama că 210 pt; ^ 1 000:

1027 = (103^9; ^ (210^9 _ 290,

Deci, a 40-a generaţie trebuie să treacă prin încă 90 de divizări, pentru a ocupa un volum egal cu volumul Soarelui. Numărul total de generaţii, socotind de la prima,

* Vezi cartea mea Jivaia matematica (Matematica vie), cap. VII.

Este egal cu 40 -f 90 = 130. Se poate uşor afla timpul necesar pentru formarea lor care este de peste 147 de zile.

Un singur microbiolog (Metalnikov) a reuşit să urmărească a 8 00l-a divizare a unui paramecium. Cititorul poate să calculeze volumul imens pe care l-ar ocupa ultima generaţie, dacă s-ar considera că din acest număr n-ar pieri niciun individ. Aceeaşi problemă poate fi prezentată şi invers...

Să presupunem că Soarele s-a divizat în două părţi egale, şi fiecare jumătate – din nou în două etc. De câte ori ar fi trebuit să se repete această operaţie, pentru a se obţine particule de mărimea unui infuzor"?

Deşi răspunsul este deja cunoscut cititorului – adică 130, el surprinde totuşi prin modestia lui.. T

Mie mi s-a pus problema sub forma următoare:

Avem o coală de hârtie pe care o rupem în două părţi egale: una din jumătăţile obţinute o rupem, de asemenea, în două etc. Câte împărţiri trebuie făcute pentru a obţine particule de dimensiuni atomice?

Să presupunem că o coală de hârtie cântăreşte un gram, iar un atom, -^-g. Deoarece IO24 poate fi aproximat cu

280, rezultă că în total vor fi necesare 80 de împărţiri, dar în niciun caz milioane – aşa cum se răspunde câteodată.

De 100 000 de ori mai repede

Triggerul (sau circuitul basculant) este un dispozitiv electric format din două lămpi electronice, asemănătoare celor folosite în aparatele de radiorecepţie. În interiorul său, curentul poate circula numai printr-o singură lampă: fie prin cea „din stânga”, fie prin cea „din dreapta”. Dispozitivul este prevăzut cu două borne de intrare – la care se poate aplica, din exterior, un semnal electric (impuls) de scurtă durată – şi două borne de ieşire, la care apare impulsul de răspuns al triggerului. În momentul aplicării impulsului electric de intrare se produce comutarea triggerului: lampa prin care trecea curentul este scoasă din circuit, iar curentul începe să circule prin cealaltă. Impulsul de răspuns este dat de trigger în momentul când lampa din dreapta este deconectată (curentul care trecea prin ea este întrerupt), iar prin lampa din stingă începe să circule curentul.

Să urmărim cum va funcţiona triggerul dacă îi vom aplica succesiv câteva impulsuri electrice. Vom caracteriza poziţia triggerului după lampa din dreapta: dacă curentul nu trece prin lampa din dreapta, spunem că triggerul se află în „poziţia 0”, iar dacă curentul trece prin această lampă – triggerul va fi în „poziţia 1”.

Să presupunem că la început triggerul se află în poziţia 0, adică curentul trece prin lampa din stingă (fig. 1). După primul impuls, aşa cum am spus, curentul va circula prin lampa din dreapta, adică triggerul va fi în poziţia 1.

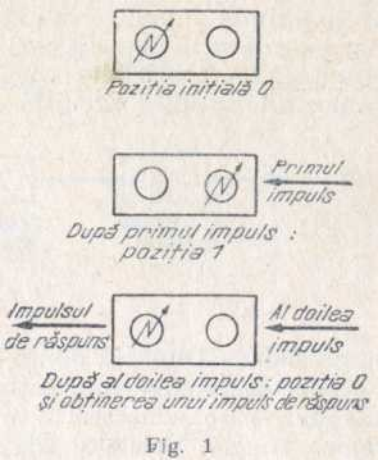
În acest caz însă nu va urma impulsul de răspuns al triggerului, deoarece acesta apare numai în momentul ieşirii din circuit a lămpii din dreapta (nu a celei din stingă).

După al doilea impuls, curentul va circula prin lampa din stingă, deci triggerul va fi din nou în poziţia 0 şi va da semnalul (impulsul) de răspuns.

Deci, după două impulsuri, triggerul revine la poziţia iniţială. După al treilea impuls, ca şi după primul, triggerul va fi din nou în poziţia 1, iar după al patrulea, ca şi după

al doilea, în poziţia 0, obţinându-se din nou semnalul de răspuns etc. După fiecare două impulsuri, poziţiile triggerului se repetă.

Să ne închipuim câteva triggere montate astfel incit impulsurile de intrare să fie aplicate primului trigger, impulsurile de răspuns ale primului —la bornele de intrare a celui de-al doilea, impulsurile de răspuns ale celui de-al doilea să fie aplicate la iptrarea celui de-al treilea trigger etc. (în fig. 2 triggerele sunt aşezate unul după altul, de la


Poziţia iniţială 0
Primul impuls
După primul impuls : poziţia 1
Impulsul de răspuns
Al doilea impuls
După al doilea impuls : poziţia 0 şi obţinerea unui impuls de răspuns
Fig. 1

dreapta spre stânga). Să vedem cum funcţionează acest sistem de triggere.

Să presupunem că la început toate triggerele se află în poziţiile 0. Astfel, pentru un circuit format din 5 triggere poziţia iniţială este caracterizată prin combinaţia 00000. După primul impuls, primul trigger va ajunge în poziţia 1, dar pentru că în această poziţie nu se obţine un semnal de răspuns, toate celelalte triggere vor continua să rămână în poziţiile 0, adică circuitul va fi caracterizat prin combi

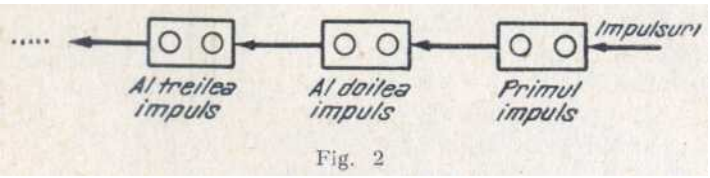


Fig. 2

naţia 00001. După al doilea impuls, primul trigger va fi deconectat (ajunge în poziţia 0) şi va da un semnal de răspuns, care conectează (pune în funcţiune) cel de-al doilea trigger. Celelalte triggere vor continua să rămână în poziţia 0 şi circuitul va fi caracterizat prin combinaţia 00010. După al treilea impuls va fi conectat din nou primul trigger, celelalte rămânând însă în aceleaşi poziţii. Circuitul va fi caracterizat de data aceasta prin combinaţia 00011. După al patrulea impuls, primul trigger va fi deconectat şi va da semnalul de răspuns; sub acţiunea acestui impuls se va deconecta cel de-al doilea trigger care dă, de asemenea, un impuls de răspuns; şi, în sfârşit, acest din urmă impuls va deconecta cel de-al treilea trigger; se obţine astfel combinaţia 00100.

Să vedem ce rezultă dacă continuăm raţionamentul nostru şi mai departe:

Primul impuls combinaţia 00001

al 2-lea impuls combinaţia 00010

al 3-lea impuls combinaţia 00011

al 4-lea impuls combinaţia 00100

al 5-lea impuls combinaţia 00101

al 6-lea impuls combinaţia 00110

al 7-lea impuls combinaţia 00111

al 8-lea impuls... Combinaţia 01000

Observăm ca un circuit format din triggere „numără” semnalele aplicate la intrare şi „notează”, într-un fel original, numărul acestor semnale. Este uşor de reţinut că „notarea” numărului de semnale nu se face cu ajutorul sistemului de numeraţie zecimal ci al sistemului de nume- raţie în baza doi.

În această bază se folosesc numai cifrele 0 şi 1, şi orice număr este notat cu zerouri sau unităţi. Aci, o unitate de ordin superior nu este de zece ori mai mare decât cea precedentă (ca la sistemul zecimal), ci numai de două ori. Unitatea care. Ocupă ultimul loc (extrema dreaptă) este unitatea obişnuită. Unitatea de ordin superior unităţii obişnuite (al doilea loc de la dreapta la stingă) este numărul 2; al treilea loc îl ocupă numărul 4, urmează apoi 8 etc.

De exemplu, numărul 19=16+2+1 se scrie în baza doi sub forma 10011.

Prin urmare, circuitul format din triggere „numără” semnalele aplicate şi „înregistrează” numărul lor folosind numai cifrele 0 şi 1. Menţionăm că durata de înregistrare a unui impuls care trece prin trigger este de ordinul a IO-6 s. Triggerele moderne pot „înregistra” până la 1 000 000 de impulsuri pe secundă şi chiar mai mult. Aceasta înseamnă de 100 000 ori mai mult decât poate socoti un om fără ajutorul maşinii (ochiul omului poate distinge clar semnale care se succed la un interval de cel mult 0,1 s).

Dacă vom lega în serie douăzeci de triggere, adică vom înregistra numărul de semnale aplicate cu ajutorul a cel mult 20 de cifre, putem număra până la 220 – 1; acest număr depăşeşte 1 milion. Eormând o serie de 64 de triggere, se poate înregistra, cu ajutorul lor, faimosul număr din legenda „tablei de şah” (18 446 744 073 709 551 615 N.T.).

Posibilitatea de a număra sute de mii de semnale pe secundă este de foarte mare importanţă pentru fizica nucleară. De exemplu, se poate înregistra numărul de particule eliberate la dezintegrarea nucleului atomic.

10 000 (le operaţii pe secundă

Este interesant faptul că montajele cu triggere permit şi efectuarea operaţiilor cu numere. Să vedem cum se poate face, de exemplu, adunarea a două numere.

Să presupunem trei circuite, formate din triggere, conectate între ele aşa cum se arată în fig. 3. Circuitul de sus serveşte pentru înregistrarea primului termen al sumei, circuitul al doilea (de mijloc) – pentru înregistrarea celui de-al doilea termen

al sumei, iar circuitul de jos – pentru înregistrarea sumei totale. În momentul punerii în func-

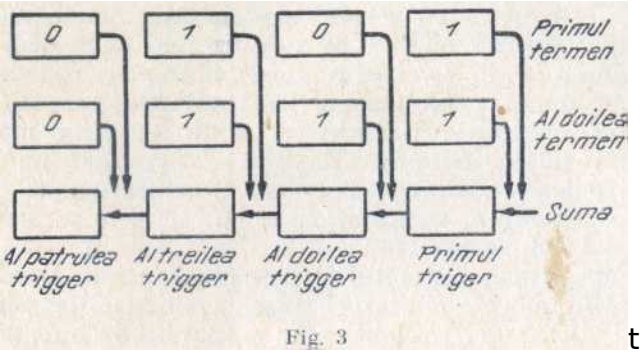


Fig. 3

t

ţiune a dispozitivului, la triggerele din circuitul de jos sosesc impulsurile de la triggerele din primul şi al doilea circuit (cel de sus şi cel de mijloc), care se află în poziţia 1.

Să presupunem, aşa cum se vede în fig. 3, că cei doi termeni ai sumei, scrişi în primele două circuite, sunt 101 şi 111 (în sistemul de numeraţie cu baza 2). În acest caz, în primul trigger al circuitului de jos (cel din dreapta) vor sosi două impulsuri: de la primele două triggere ale fiecărui termen al sumei. După cum am spus mai înainte, la aplicarea a două impulsuri, primul trigger va rămâne în poziţia 0, însă va trimite un impuls de răspuns celui de-al doilea trigger. În afară de aceasta, la al doilea trigger soseşte şi semnalul de la al doilea termen al sumei. Deci al doilea trigger primeşte două impulsuri din care cauză rămâne şi el în poziţia 0, dar va trimite semnalul de răspuns celui de-al treilea trigger. Pe lângă aceasta, asupra triggerului al treilea vor fi aplicate încă două impulsuri (de la fiecare termen al sumei). Primind cele trei semnale (impulsuri), triggerul trei va trece în poziţia 1 şi va transmite semnalul de răspuns triggerului al patrulea, care va trece în poziţia 1 (alte semnale nu mai sosesc la triggerul patru), în felul acesta, dispozitivul reprezentat în fig. 3 a efectuat (în sistemul de numeraţie în baza doi) adunarea a două numere „pe coloane”:

$$\begin{array}{r} 101 + \\ 111 \\ \hline 1100 \end{array}$$

s^u în sistemul zecimal: 5 + 7 = 12. S-ar putea spune că impulsurile de răspuns din circuitul de jos corespund faptului următor: dispozitivul „memorează” o unitate pe care o trece în ordinul următor (superior), adică efectuează acelaşi lucru pe care îl facem noi atunci când adunăm „pe coloane”.

Dacă fiecare circuit ar fi format nu din patru, ci din 20 de triggere, s-ar putea face adunarea până la un milion, iar când se foloseşte un număr şi mai mare de triggere se pot aduna numere şi mai mari.

În realitate, dispozitivul destinat pentru efectuarea adunării trebuie să aibă o schemă mai complicată decât cea din fig. 3. Printre altele, el trebuie să fie prevăzut cu mecanisme speciale, menite să „decaleze” semnalele. Într-adevăr, în cazul schemei din fig. 3, semnalele de la cei doi termeni ai sumei sosesc la primul trigger

din circuitul de jos simultan (în momentul conectării dispozitivului). De aceea, cele două semnale se vor contopi şi triggerul le va percepe ca pe unul singur, şi nu ca două semnale diferite. Spre a evita aceasta, este necesar caj semnalele sosite de la cei doi termeni ai sumei să nu fie aplicate simultan, ci cu un „decalaj” între ele, unul după ajtul. Datorită acestui „decalaj”, timpul necesar adunării celor doi termeni este mai lung decât cel necesar înregistrării unui singur semnal, în cazul calculatoarelor cu triggere.

Modificând schema, se poate obţine un dispozitiv care în loc de adunări să efectueze scăderi sau chiar înmulţiri (înmulţirea se reduce la efectuarea succesivă a unor adunări şi de aceea cere un interval de timp de câteva ori mai mare), împărţiri şi alte operaţii.

Dispozitivele despre cal’e am vorbit mai sus sunt folosite la maşinile de calculat. Ele pot efectua peste 10 000 de operaţii într-o secundă! S-ar părea că această viteză ame- ţitoare n-are nici nn sens practic. De exemplu, noi nu sesizăm nicio deosebire dacă o maşină de calculat ridică la pătrat un număr de 15 cifre într-o zecime de miime de secundă sau, să zicem, într-un sfert de secundă. Ni se pare că şi într-un caz şi în celălalt problema este rezolvată „instantaneu”.

Dar să nu ne grăbim cu concluziile. Să luăm următorul exemplu. Un şabist bun, înainte de a face o mutare, analizează zeci şi chiar sute de variante posibile. Dacă admitem că pentru studierea unei variante sunt necesare câtefa secunde, atunci pentru analiza unei sute de variante vor fi necesare minute şi zeci de minute. Se întâmplă adesea ca jucătorii de şah să ajungă în „criza de timp”, adică să fie nevoiţi să mute repede, tocmai pentru că au pierdut aproape întregul timp fixat pentru gândire studiind mutările anterioare. Ce s-ar întâmplă dacă analiza variantelor unei partide de şah ar fi încredinţată unei maşini? Efectuând mii de calcule într-o secundă, maşina analizează toate variantele „instantaneu” şi nu va ajunge niciodată în „criză de timp”.

Dar, evident, veţi spune că una este să efectuezi calcule (chiar destul de complicate) şi alta – să joci şah: maşina nu va putea niciodată să facă acest lucru! Un şahist analizând variantele nu calculează, ci gândeşte! Să nu ne grăbim, vom reveni asupra acestui subiect.

Numărul partidelor de şali posibile

Să calculăm cu aproximaţie numărul total al partidelor de şah diferite, ce pot fi jucate. Un calcul precis este practic imposibil de făcut, dar vom încerca să arătăm cititorului cum se poate aprecia, în mod aproximativ, acest număr. În cartea matematicianului belgian M. Craitohik Matematica jocurilor şi distracţii matematice, există următoarea evaluare:

„La prima mutare, albul are posibilitatea să aleagă una dintre cele 20 de mutări (16 mutări ale celor 8 pioni, fiecare dintre ei putându-se deplasa cu unul sau două câmpuri, şi câte două mutări ale fiecărui cal). La fiecare mutare a albului, negrul poate răspunde cu una dintre cele 20 de mutări. Înmulţind fiecare mutare a albului

cu fiecare mutare a negrului, vom avea 20 • 20 = 400 partide diferite numai după prima mutare efectuată de ambii concurenţi.

Începând cu a doua mutare, numărul variantelor posibile creşte. Astfel, dacă prima mutare a albului a fost e2 – el, atunci la a doua mutare el are posibilitate să aleagă una dintre cele 29 de variante posibile. Mai departe, numărul mutărilor posibile creşte şi mai mult. Numai dama ocupând, de exemplu, eâmpul d5 poate alege o variantă dintre cele 27 posibile (presupunând că toate câmpurile, unde ea poate fi mutată, sunt libere). În vederea simplificării calculelor, vom adopta următoarele valori medii:

pentru fiecare tabără la câte 20 de mutări posibile primele cinci mutări; câte 30 de mutări posibile la mutările următoare.

În afară de aceasta admitem ca, în medie, într-o partidă normală să fie cam 40 de mutări. Atunci, pentru numărul de partide posibile, vom avea expresia:

(20 • 20)5 -(30 • 30)35

Pentru a ne putea da seama, cu aproximaţie, de valoarea acestei expresii, să facem următoarele transformări şi simplificări:

(20 • 20)5 • (30 • 30)35 = 2010 • 3C70 = 210 • 373 • IC80.

Să înlocuim pe 210 cu numărul aproximativ egal 1 000, adică IO3.

Reprezentăm expresia 370 sub forma:

3™ = 368 ■ 32 ^ 10 (34)17 st; 10 • 8017 = 10 • 817 • 1017 = 251 • 1018 =

= 2 (210)5 • IO18 2 ■ IO15 • IO18 = 2 • IO33.

Prin urmare,

(20 • 20)5 • (30 ■ 30)35=t; IO3 • 2 • IO33 • 108° = 2 • IO116.

Acest număr întrece cu mult numărul legendar al boabelor de grâu, cerute drept răsplată pentru inventarea jocului de şah (264 – 1 ^ 18 ■ IO18). Dacă întreaga populaţie de pe glob ar juca şah zi şi noapte, făcând câte o mutare pe secundă, atunci pentru epuizarea tuturor partidelor de şah posibile ar fi necesar ca acest joc să dureze nu mai puţin de IO100 secole!

Secretul maşinii automate de şah

Vă veţi mira, desigur, aflând că odinioară au existat maşini automate de şah. Într-adevăr, cum putem să ne imaginăm aceasta, când ştim că numărul combinaţiilor posibile ale pieselor pe tabla de şah este practic infinit?

Toate acestea se pot explica foarte simplu. De fapt a existat nu maşina automată, ci numai încrederea în posibilitatea existenţei ei. În special, maşina automată a mecanicului ungur Wolfgang von Kempelen (1734—1804) s-a bucurat de foarte multă popularitate; ea a fost prezentată la curţile imperiale ale Austriei şi Eusiei, iar mai târziu a făcut obiectul unor demonstraţii publice la Paris şi Londra. Napoleon I a

jucat cu acest automat, fiind convins că îşi măsoară forţele cu o maşină. Pe la jumătatea secolului trecut, faimosul automat a ajuns în America unde şi-a încheiat existenţa (la Philadelphia) cu ocazia unui incendiu.

Alte maşini automate de şah s-au bucurat de mai puţină popularitate, dar credinţa în existenţa lor s-a păstrat încă mult timp.

În realitate, niciuna dintre aceste maşini de şah nu funcţionau automat. În interior se ascundea întotdeauna un jucător de şah iscusit care mişca figurile. Acel automat închipuit era format dintr-o ladă destul de voluminoasă încărcată cu un mecanism complicat. Deasupra lăzii se afla o tablă de şah cu figuri care erau mutate de mina unei păpuşi mari. Înainte de începerea jocului se arăta publi- oului că în interiorul lăzii nu se găsesc decât mecanisme. Dar compartimentele lăzii fiind deschise pe rând, jucătorul care se ascundea înăuntru avea timp să se mute dintr-un compartiment într-altul fără să fie observat de asistenţă. (Acest rol l-au îndeplinit un timp celebrii jucători de şah Johann Aligauer şi William Lewis). În felul acesta, meca nismul maşinii automate nu participa câtuşi de puţin la joc, ci masca doar prezenţa jucătorului.

Din cele spuse s-ar putea trage următoarea concluzie: numărul partidelor de şah este practic infinit, dar maşinile, automatele care ar putea să aleagă soluţia cea mai fericită, există doar în închipuirea oamenilor naivi. De aceea nu trebuie să ne temem de o criză a şahului.

În ultimii ani însă s-au petrecut evenimente care pun la îndoială justeţea acestei afirmaţii: astăzi există maşini care „joacă” şah. Acestea sunt maşini de calculat complicate, care pot efectua mii de operaţii pe secundă. Despre aceste maşini am vorbit mai sus. Dai1 în ce fel poate o maşină „juca” şah?

Desigur, nicio maşină de calcul nu poate face altceva decât operaţii cu numere. Dar calculele sunt efectuate de maşină după o schemă de operaţii stabilită, după un „program” întocmit dinainte.

„Programul” jocului de şah este întocmit de matematicieni pe baza unei anumite tactici a jocului, înţelegând prin aceasta un sistem de reguli, potrivit cărora pentru orice poziţie poate fi aleasă o singură mutare („cea mai bună”, în sensul tacticii date). Iată un exemplu de tactică. Pentru fiecare figură este prevăzut un număr determinat de puncte:

Rege	+ 200 de puncte	Pion	+ 1 punct
Damă . . .	+ 9 puncte	Pion rămas în urmă	— 0,5 puncte
Turn	+ 5 puncte	Pion izolat	— 0,5 puncte
Nebun . . .	+ 3 puncte	Pion dublat . . .	— 0,5 puncte
Cal	+ 3 puncte		

Afară de aceasta, se apreciază într-un mod determinat avantajele de poziţie ale pieselor (mobilitatea figurilor, aşezarea lor mai aproape de centru decât de flancuri etc.) care se exprimă în zecimi de punct. Dacă se scade din suma totală a punctelor corespunzătoare pieselor albe, suma totală a punctelor corespunzătoare pieselor negre, diferenţa obţinută caracterizează, într-o anumită măsură, superioritatea materială şi poziţională a albului faţă de negru. Maşina de calculat socoteşte în ce

fel poate varia diferenţa dată, în decursul următoarelor 3 mutări, alege Cea mai bună variantă din toate combinaţiile posibile şi imprimă rezultatul pe o fişă specială: „mutarea” a fost făcută *. Pentru efectuarea unei mutări, maşina are nevoie de foarte puţin timp (în funcţie de felul programului şi de viteza de funcţionare a maşinii), astfel încât ea nu se teme de „criza de timp”.

Desigur că studierea „pentru numai 3 mutări” denotă că maşina este un „jucător” destul de slab **. Nu ne îndoim însă de faptul că, datorită progresului tehnic, maşinile vor „învăţa” în curând să „joace” şah. Mult mai bine.

Cu ajutorul a trei cifre de 2

Evident, oricine ştie în ce fel trebuie scrise trei cifre pentru ca ele să reprezinte un număr cât mai mare. De exemplu, trei cifre de 9 trebuie aşezate în trei etaje:

n9

99.

Numărul acesta este atât de mare, încât prin comparaţie nu s-ar putea reda mărimea sa. Numărul de electroni din întregul univers accesibil observaţiei este infim în comparaţie cu numărul dat. În cartea mea Aritmetica distractivă, cap. X, am mai vorbit despre acest număr. Revin asupra acestei probleme, deoarece doresc ca, după modelul ei, să vă prezint o alta:

Să se scrie cu ajutorul a trei cifre de 2, fără a folosi semne de operaţii, cel mai mare număr posibil.

Rezolvare

Poate prin analogie cu aşezarea celor trei cifre de 9 veţi fi tentaţi să dispuneţi la fel şi cele trei cifre de 2:

- o2

22.

* Există şi o altă „tactică” de şah. Astfel, la efectuarea calculelor, în loc să fie analizate toate mutările posibile ale adversarului, pot fi analizate numai mutările „tari” (şah, capturare, atac, apărare etc.). Apoi, când adversarul face mutări deosebit de „tari”, maşina poate analiza variantele cele mai bune pentru mai mult de 3 mutări. Se poate, de asemenea, folosi o altă scară pentru aprecierea numărului de puncte. În funcţie de tactica adoptată se schimbă „stilul de joc” al maşinii.

** În partidele jucate de cei mai buni maeştri ai şahului sunt prevăzute combinaţii pentru 10 şi chiar mai multe mutări,

De data aceasta, nu veţi obţine rezultatul aşteptat. Numărul scris este mic, mai mic chiar decât 222. Într-adevăr: nu am scris decât 24, adică 16.

Numărul cel mai mare care poate fi format cu ajutorul a trei cifre de 2 nu este nici 222 şi nici 222 (adică 484), ci

222 = 4 194 304.

Exemplul este foarte instructiv. El arată că în matematică este periculos să se procedeze prin analogie, deoarece aceasta poate duce uneori la concluzii greşite.

Cu ajutorul a trei cifre de 3

Problemă

Acum, cred că veţi fi prudenţi îu rezolvarea următoarei probleme:

Să se scrie cu ajutorul a trei cifre de 3, fără a folosi semne de operaţii, cel mai mare număr posibil.

Rezolvare

Aşezarea cifrelor în trei etaje nu duce nici de data aceasta la rezultatul dorit, deoarece:

3, i3, adică 32’, este mai mic decât 333.

Această ultimă aşezare dă răspunsul la problemă.

Cu ajutorul a trei cifre de 4

Problemă

Să se scrie cel mai mare număr posibil cu ajutorul a trei cifre de 4, fără a folosi semne de operaţii.

Rezolvare

Dacă în cazul de faţă veţi proceda după modelul celor două probleme precedente, adică veţi da răspunsul veţi greşi, deoarece de data aceasta aşezarea cifrelor în trei etaje este cea care dă numărul cel mai mare. Într-adevăr, 4 4 – 256, iar 4256 este mai mare decât 444.

Cu ajutorul a trei cifre identice

Să încercăm să pătrundem în esenţa acestui fenomen neaşteptat şi să stabilim de ce unele cifre, atunci când sunt aşezate în trei etaje, dau naştere la numere uriaşe, iar altele – nu. Să analizăm cazul general.

Să se scrie cu ajutorul a trei cifre identice, fără a folosi semnele operaţiilor, cel mai mare număr posibil.

Să notăm cifra cu litera a. Aşezării

222, 333, 444

îi corespunde reprezentarea:

al0a4-o; adică al] a.

Cât priveşte aşezarea în trei etape, aceasta va fi de forma:

a"a.

Să determinăm pentru ce valoare a lui a va da ultimul mod de aşezare un număr mai mare decât primul. Deoarece baza ambelor expresii este aceeaşi, valoarea mai mare o va avea expresia cu exponentul mai mare. Dar când avem:

aa >11 a?

Să împărţim ambii membri ai inegalităţii prin a. Obţinem:

aa ~ 1 > 11.

Observăm că aa ~ ’ este mai mare ca 11 numai în cazul când a este mai mare decât 3, deoarece:

44 – 1 >11, iar

32 şi 21

sunt mai mici decât 11.

Acum se explică surprizele pe care le-am întâlnit în rezolvarea problemelor precedente: pentru cifrele 2 şi 3 trebuie să adoptăm un mod de aşezare, iar pentru cifra 4 şi celelalte cifre mai mari – un altul.

Cu ajutorul a patru cifre de I

Problemă

Să se scrie numărul cel mai mare posibil cu ajutorul a patru cifre de 1 fără a folosi semnele operaţiilor matematice.

Rezolvare

Numărul 1111, care ne vine îndată în minte, nu răspunde cerinţelor problemei, deoarece ini este mult mai mare. Este prea greu să calculăm acest număr înmulţind pe 11 de 10 ori cu el însuşi. Dar el poate fi uşor evaluat cu ajutorul tabelelor de logaritmi.

Valoarea sa întrece 285 de miliarde şi, prin urmare, este mai mare decât 1111 de 25 000 000 de ori.

Cu ajutorul a patru cifre de 2

Problemă

Să facem un pas mai departe în dezvoltarea problemelor de tipul considerat şi să abordăm problema pentru cazul a patru cifre de 2.

Pentru ce aşezare formează patru cifre de 2 cel mai mare număr posibil?

Rezolvare

Sunt posibile 8 combinaţii:

2222, 2222, 2 222, 2222,

9922 9 222 9222 9222

Care este cel mai mare dintre aceste numere f

Să analizăm mai întâi primul rinei, adică numerele aşezate în două etaje.

Primul număr – 2222 – este mai mic decât celelalte trei. Pentru a compara numerele

2222 şi 2 222, vom transforma cel de-al doilea număr:

2 222 = 2 2 2 • o = (222) n = 484H.

Numărul obţinut este mai mare decât 2222, deoarece pentru 48411 atât baza cât şi exponentul sunt mai mari decât pentru numărul 2222.

Să comparăm numerele 2222 şi 2222. Pentru aceasta să-l înlocuim pe 2222 cu un număr mai mare, 32 22 şi să demonstrăm că şi acest număr mai mare este mai mic decât 2222.

Într-adevăr,

3222 = (25)22 = 2110, şi exponentul este mai mic decât 222.

Cel mai mare număr din primul rând considerat este 2222.

Acum ne rămâne să comparăm între ele cinci numere: cel obţinut mai înainte şi următoarele patru:

9o22 o222 o222 ()2-2 “4)4, w 4

Ultimul număr, egal cu 216, iese imediat din competiţie. Mai departe, numărul 222“ egal cu 224este mai mic decât 324 sau 220, dacă este mai mic decât următoarele două numere (222“ şi 2222). Rămâne doar să comparăm între ele trei numere, fiecare din ele reprezentând o putere a lui 2. Este clar că va fi mai mare acela dintre numere al cărui exponent este mai mare. Dintre cei trei exponenţi:

222, 484 şi 220 + 2 (= 210 2- 22 ^ 106-4), ultimul este cel mai mare.

Deci, numărul cel mai mare, care poate fi scris cu ajutorul a patru cifre de 2, este:

r.22

>2~

Fără a folosi tabelele de logaritmi, ne putem forma o idee despre valoarea acestui număr cu ajutorul aproximaţiei:

210^1000.

Într-adevăr,

222 _ 220. 22 Ps 4 • IO6,

022

2 2 24 000 000 ^910 j 400 000 ^ 1200000

Deci acest număr este format din peste 1 milion de cifre.

CAPITOLUL II

LIMBAJUL ALGEBRIC

Arta de a forma ecuaţii

Limbajul algebric este compus din ecuaţii.

„Ca să putem rezolva o problemă privind numerele sau relaţiile între mărimile abstracte, este suficient să traducem problema dată din limba maternă (vorbirea curentă) în limbaj algebric”, scria marele Newton în manualul său intitulat Aritmetica universală. El a arătat prin exemple cum se face o asemenea transpunere. Iată unul dintre ele:

În vorbirea curentă	În limbaj algebric
Un negustor posedă o sumă de bani.	x
În primul an el a cheltuit 100 lire sterline.	$x - 100$
La suma rămasă a adăugat a treia parte din aceasta.	$(x - 100) + \frac{x-100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
În anul următor a cheltuit din nou 100 lire sterline	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
Apoi şi-a mărit suma rămasă cu a treia parte din valoarea ei	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
În al treilea an a cheltuit din nou 100 de lire sterline.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
După cea a mai adăugat la suma rămasă a treia parte din valoarea ei.	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14\,800}{27}$
Capitalul lui s-a dublat faţă de cel iniţial.	$\frac{64x - 14\,800}{27} = 2x$

Pentru aflarea capitalului iniţial al negustorului, ră- mâne să rezolvăm această din urmă ecuaţie.

În general, rezolvarea ecuaţiilor nu este un lucru greu; mai dificilă este alcătuirea lor după datele problemei. După cum vedeţi, arta de a construi ecuaţii se reduce într-adevăr la iscusinţa de a transpune o problemă din vorbirea curentă în limbaj algebric. Transpunerea textului în ecuaţii poate fi mai uşoară sau mai grea, după cum vă veţi convinge din cele câteva exemple ce vor urma relative la compunerea ecuaţiilor de gradul I.

Viaţa lui Diofaut

Problemă

Din istorie se cunosc puţine date privitoare la biografia lui Diofant, celebru matematician al antichităţii. Tot ce se ştie despre el s-a aflat din epitaful său, scris sub forma unei probleme matematice. Eedăm mai jos acest epitaf:

În vorbirea curentă	În limbaj algebric
Călătorule ! Aci se odihnesc osemintele lui Diofant. Şi numerele pot, o minune, să spună cît i-a fost pe pămînt drumul vieţii	x
Partea a şasea din drumul acesta s-a scurs în fericita sa copilărie	$\frac{x}{6}$
A mai trecut a 12-a parte din viaţă, după ce fii dăduseră tuleiele pe faţă	$\frac{x}{12}$
A şaptea parte, Diofant şi-o petrecuse în căsătorie, fără copii	$\frac{x}{7}$
Au trecut încă 5 ani ; el a fost fericit de naşterea primului său fiu,	5
căruia destinul i-a hărăzit pe pămînt doar jumătate din viaţa senină în comparaţie cu a părintelui său	$\frac{x}{2}$
Şi-n mîhnire adîncă şi-a încheiat bătrînul drumul vieţii, supravieţuind cu patru ani fiului său	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Spune, ce vârstă avea

Când a întâmpinat Diofant moartea?

Rezolvare

Rezolvând ecuaţia şi găsind x – 84, aflăm următoarele date din biografia lui Diofant: s-a căsătorit la 21 de ani, la 38 de ani a devenit tată, la 80 de ani şi-a pierdut fiul şi a murit în vârstă de 84 de ani.

(laiul şi calinii

Problemă

Iată încă o problemă simplă, din timpuri străvechi, care poate fi uşor transpusă în limbaj algebric.

„Un cal şi un catâr păşeau alături având fiecare în spate câte o povară. Calul se văita de greutatea poverii sale. «De ce te vaieţi? l-a întrebat catârul. Dacă aş lua de la tine un sac, povara mea ar deveni de două ori mai grea decât a ta. Iar dacă tu ai lua un sac de pe spinarea mea, povara ta ar deveni egală cu a mea».

Spuneţi, matematicieni înţelepţi, câţi saci ducea calul şi câţi catârul?”.

Rezolvare

Dacă aş lua de la tine un sac,	$x - 1$
povara mea	$y + 1$
ar deveni de două ori mai grea decît a ta	$y + 1 = 2(x - 1)$
Iar dacă tu ai lua un sac de pe spinarea mea,	$y - 1$
povara ta	$x + 1$
ar deveni egală cu a mea	$y - 1 = x + 1$

Am redus problema la un sistem de ecuaţii cu două necunoscute:

$$\begin{cases} y + 1 = 2(x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - x = 2. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, aflăm: x = 5, y = 7. Calul ducea 5 saci, iar catârul – 7.

Patru fraţi

Problemă

Patru fraţi aveau’ împreună 45 ruble. Dacă suma pe care o avea primul frate s-ar mări cu 2 ruble, cea a celui de-al doilea frate s-ar micşora cu 2 ruble, cea a celui de-al treilea s-ar dubla, iar suma celui de-al patrulea s-ar micşora de două ori, atunci fiecare frate ar avea aceeaşi sumă de bani. Câte ruble avea fiecare în parte la început?

Rezolvare

Cei patru fraţi au împreună 45 de ruble	$x + y + z + t = 45$
Dacă suma primului frate s-ar mări cu 2 ruble,	$x + 2$
suma celui de-al doilea frate s-ar micşora cu 2 ruble,	$y - 2$
suma celui de-al treilea s-ar dubla	$2z$
şi suma celui de-al patrulea s-ar micşora de două ori	$\frac{t}{2}$
Fiecare frate ar avea aceeaşi sumă de bani	$x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$

Să scriem aceste egalităţi din urmă sub forma de trei ecuaţii: $x+2=y-2,\quad x+2=2z,\quad x+2=\frac{t}{2}$

de unde:

$$y=x+4,\quad z=\frac{x+2}{2},\quad t=2x+4.$$

Substituind lui x, y, z aceste expresii în prima ecuaţie, obţinem:

$$x+x+4+\frac{x+2}{2}+2x+4=45,$$

de unde x = 8. Mai departe obţinem: y = 12, z = 5, t – 20. Deci primul frate avea 8 ruble, al doilea, 12, al treilea, 5 şi al patrulea, 20 de ruble.

Păsările <le pe malurile unui râu

Problemă

La un matematician arab din secolul al XI-lea găsim următoarea problemă:

„Pe malurile unui râu cresc, faţă în faţă, doi palmieri, înălţimea unui palmier este de 30 de coţi * şi a celuilalt – de 20 de coţi, distanţa dintre palmieri fiind de 50 de coţi. Pe vârful fiecărui palmier stă câte o pasăre. La un moment dat, ambele păsări au observat un peşte care a apărut la. Suprafaţa apei între cei doi palmieri; ele s-au repezit deodată asupra peştelui şi l-au ajuns în acelaşi timp (fig. 4).

* 1 cot ^ 33 cm – N. T.

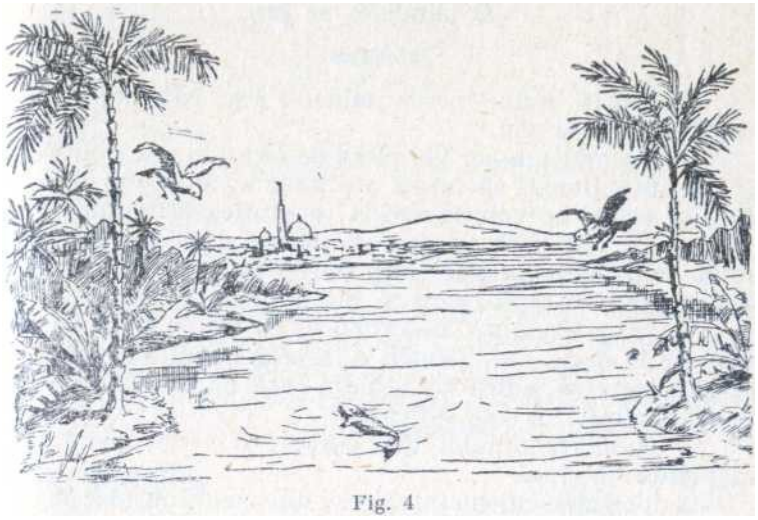


Fig. 4

La ce distanţă de palmierul mai înalt a apărut peştele?

Rezolvare

Din fig. 5, folosind teorema lui Pitagora, obţinem:

Ân2 = 3O2 + x2, AC2 = 202 + (50 – x)2.

Dar AB = AC, deoarece ambele păsări au parcurs aceste distanţe în acelaşi timp. De aceea,

• 302 + x2 – 20a + (50 – x)2.

Desfăcând parantezele şi făcând reducerile, obţinem ecuaţia de gradul I \

\ c

100x= 2000, \

de unde: \

* = 20. \

Peştele a apărut la o distanţă \A

de 20 de coţi de palmierul —I—— L

mai înalt, Fig. 5.

O plimbare pe jos

Problemă

— Poftiţi mâine pe la mine – zise bătrânul doctor unui prieten al său.

— Yă mulţumesc. Voi pleca de acasă la ora trei. Dacă şi dv. Intenţionaţi să faceţi o plimbare, ieşiţi din casă la aceeaşi oră şi ne vom întâlni la jumătatea drumului.

— Dv. Uitaţi că eu sunt om bătrân şi nu pot face mai mult de 3 km pe oră, în timp ce dv. Puteţi parcurge uşor 4 km. Cred că ar fi cazul să mă avantajaţi puţin.

— Aveţi dreptate. Dat fiind că eu fac cu 1 km pe oră mai mult decât dv., pentru a nivela condiţiile, vă dau acest kilometru, adică voi ieşi din casă cu un sfert de oră mai devreme. Vă este suficient?

— E foarte amabil din partea dv. – se grăbi să-i răspundă bătrânul.

A doua zi, conform înţelegerii din ajun tânărul a plecat de acasă la ora trei fără un sfert şi s-a îndreptat spre locuinţa doctorului, mergând cu 4 km pe oră. Doctorul a plecat de acasă la ora 3 fix şi a mers cu 3 km pe oră. Când bătrânul şi tânărul s-au întâlnit, ei s-au îndreptat împreună spre locuinţa doctorului.

Întorcându-se acasă, tânărul şi-a dat seama că, acordând doctorului sfertul de oră respectiv, el a parcurs în total o distanţă nu de două ori, ci de patru ori mai mare decât doctorul. La ce distanţă de casa doctorului se afla locuinţa tânărului?

Rezolvare

Să notăm distanţa între cele două case cu x (km).

Tânărul a parcurs în total o distanţă de 2x, iar doctorul – de patru ori mai puţin, adică – . Până la întâlnire, doctorul a făcut jumătate din drumul parcurs de el, ce 3 ce adică –, iar tânărul —restul de drum, adică – . Doctorul a

4 ’ ’ 4

ce A 3 ce parcurs partea sa de drum în – ore, iar tânărul —în – ore; mai ştim că tânărul pornise la drum cu un sfert de oră înaintea doctorului.

Obţinem ecuaţia: de unde: x – 2,4 km.

Locuinţa tânărului se afla la o distanţă de 2,4 km de casa doctorului.

Echipa de cosaşi în amintirile sale despre L. \. Tolstoi, cunoscutul fizician A. V. Ţingher vorbeşte despre următoarea problemă, care plăcea foarte mult marelui scriitor:

„O echipă de cosaşi trebuia să cosească două izlazuri din care unul de două ori mai mare decât celălalt. O jumă-

’I

I

tale de zi, echipa a cosit izlazul cel mare. După aceea ea s-a împărţit în două părţi egale: prima jumătate a rămas să coseas? ă mai departe izlazul mare, pe care l-a terminat până seara; a doua jumătate a trecut pe izlazul

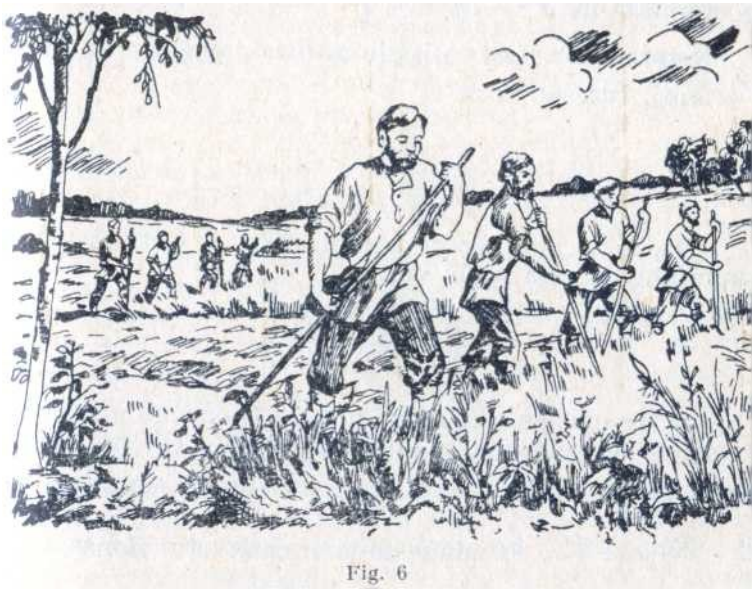


Fig. 6

mic, nnde a cosit până seara fără să-l termine, rămânând o suprafaţă pe care ulterior un cosaş a cosit-o într-o zi. Câţi cosaşi au fost. În echipă?”

Rezolvare în cazul dat, în afară de necunoscuta principală – numărul cosaşilor – pe care o vom nota cu x, mai introducem o necunoscută auxiliară – suprafaţa pe care o coseşte un cosaş într-o zi – pe care o notăm cu y. Cu toate că nu se cere determinarea acestei necunoscute, cu ajutorul ei vom putea afla mai uşor necunoscuta principală x. Să exprimăm suprafaţa izlazului mare cu ajutorul lui x şi y. Acest izlaz l-au cosit o jumătate de zi x cosaşi; ei au cosit o suprafaţă de x • 1- • y – – .

Suprafaţa a fost cosită în a doua jumătate de zi de – cosaşi, care au cosit

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}.$$

Deoarece până seara izlazul mare a fost terminat, suprafaţa lui este egală cu:

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Să trecem acum la izlazul mic, a cărui suprafaţă o vom exprima, de asemenea, cu ajutorul lui x şi y. O jumătate de zi au lucrat la el – cosaşi, care au cosit o suprafaţă de

A. I • y =. Să adăugăm la aceasta lotul rămas, egal cu y (suprafaţa cosită de un cosaş într-o zi), şi vom obţine suprafaţa izlazului mic: $\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$

Ne rămâne să transpunem în limbajul algebric fraza „primul izlaz este de două ori mai mare decât cel de-al doilea” şi ecuaţia este construită:

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2, \text{ sau } \frac{3xy}{xy + 4y} = 2.$$

Simplifieând fracţia cu y, această necunoscută auxiliară se elimină şi ecuaţia capătă forma:

$$\frac{3x}{x + 4} = 2, \text{ sau } 3x = 2x + 8,$$

de unde x = 8.

În echipă au lucrat, deci, 8 cosaşi.

După publicarea primei ediţii a Algebrei distractive, profesorul A. V. Ţingher mi-a făcut o interesantă comunicare în legătură cu această problemă. După părerea sa, efectul principal al problemei constă în aceea că „ea nu este de loc algebrică, ci aritmetică, şi încă foarte simplă, dificilă numai prin forma sa mai puţin obişnuită”.

„Istoricul acestei probleme este următorul – continuă mai departe profesorul A. Y. Ţingher. La Facultatea de medicină a Universităţii din Moscova, în perioada când au studiat tatăl şi unchiul meu, I. I. Baevski (prieten intim al lui L. Tolstoi), între alte discipline se preda şi pedagogia. Pe lângă universitate exista o şcoală de aplicaţie, unde, sub îndrumarea unor profesori cu experienţă, studenţii ţineau lecţii deschise.

Printre colegii lui Ţingher şi Baevski, a fost şi un oarecare Petrov – un tânăr foarte capabil şi original. Petrov (care a murit foarte tânăr – se pare de tuberculoză) afirma că la lecţiile de aritmetică pedagogii îi limitează pe elevi, dându-le să rezolve numai probleme tip şi numai după aceleaşi metode. Pentru a demonstra justeţea afirmaţiei sale, Petrov inventa probleme care, fiind formulate într-un mod original, diferit de cel al problemelor tip, îi încurcă pe „pedagogii iscusiţi şi cu experienţă”, dar care adesea erau rezolvate destul de uşor de elevii mai capabili, care vedeau şi alte căi de rezolvare a problemelor în afara metodelor de predare greşite. Din categoria acestor probleme face parte şi aceea despre echipa de cosaşi. Se înţelege că învăţătorii cu experienţă o rezolvau uşor cu ajutorul ecuaţiei, dar rezolvarea simplă, aritmetică, le scăpa. Cu toate acestea, problema este atât de simplă, incit nu este nevoie de algebră pentru rezolvarea ei.

Dacă pe izlazul mare a lucrat o jumătate de zi întreaga echipă şi o jumătate de zi numai o jumătate din echipă, este clar că, într-o jumătate de zi, o f jumătate din echipă coseşte – din izlaz. Prin urmare, pe izlazul mic a rămas necosită o suprafaţă de – = —.

2 3 0

Dacă un cosaş coseşte într-o zi 1 din izlaz, iar în total

6

6 2 8

a fost cosit —1—: = –, reiese că, în total, au. Fost 8 cosaşi.

6 6 6

Tolstoi, căruia îi plăceau problemele ingenioase dar nu prea complicate, cunoştea această problemă de la tatăl meu încă din tinereţe. Când am discutat cu Tolstoi, deja bătrân, despre problema dată, scriitorul s-a amuzat mult aflând că problema devine mult mai clară şi mai transparentă dacă se foloseşte schema simplă din fig. 7.

În cele ce vor urma, vom mai întâlni câteva probleme care pot fi rezolvate mult mai uşor aritmetic decât algebric.

Vacile (le pe luncă

Problemă

„în studiul ştiinţelor, problemele sunt mai utile decât regulile” – scria Newton în cartea sa Aritmetica universală, şi-şi însoţea demonstraţiile teoretice cu o serie de exemple practice. Printre aceste exerciţii se numără şi problema, prima din seria de probleme originale, referitoare la vacile care pasc pe o luncă asemănătoare celei de mai jos:

„Pe întreaga întindere a luncii, iarba creşte uniform şi la fel de repede. Ştiind că 70 de vaci ar putea paşte

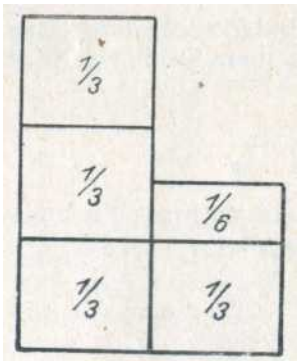


Fig. 7

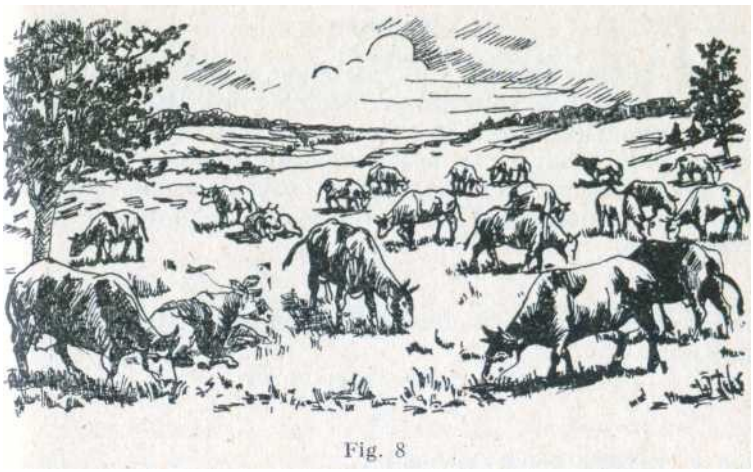


Fig. 8

această iarbă în 24 de zile, iar 30 de vaci – în 60 de zile, câte vaci ar fi păscut iarba de pe luncă în 96 de zile”.

Această problemă a servit drept subiect pentru o schiţă umoristică care aminteşte de Meditatorul lui Cehov. Doi oameni maturi, rude ale unui elev care trebuia să rezolve această problemă, încearcă ei să o facă fără rezultat şi stau nedumeriţi:

— Este ceva ciudat, spune unul dintre ei, dacă în 24 de zile 70 de vaci pasc toată iarba de pe luncă, atunci câte vaci o vor paşte în 96 de zile? Desigur 1/4 din 70, adică 17 1/2 vaci... Prima absurditate! Iat-o şi pe a doua: 30 de vaci pasc iarba în 60 de zile; câte vaci ar paşte-o în 96 de zile? Iese şi mai prost: 18 şi 3/4 vaci. Afară de aceasta: dacă 70 de vaci pasc iarba în 24 de zile, atunci 30 de vaci o pasc în 56 de zile şi nicidecum în 60, aşa cum afirmă problema.

— Dar aţi ţinut seama că iarba creşte tot timpul? întreabă celălalt.

Observaţia este justă: iarba creşte continuu şi dacă nu vom ţine seamă de acest fapt, nu numai că nu vom putea rezolva problema, dar şi enunţul ne va părea contradictoriu.

Deci, în ce fel se rezolvă problema?

Rezolvare

Şi de data aceasta vom introduce o necunoscută auxiliară, y, prin care vom nota creşterea cantităţii de iarbă în 24 de ore. Deci, dacă în 24 de ore creşte o cantitate de iarbă egală cu y, în 24 de zile această creştere va fi egală cu 24 y; not-înd cu 1 cantitatea totală de iarbă existentă pe luncă în momentul iniţial, rezultă că în 24 de zile vacile vor paşte

1 + 24 y.

În 24 de ore, întreaga cireadă (compusă din 70 de vaci) va paşte

* $\frac{1+24y}{24}$

iar o singură vacă va paşte:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70}$$

Raţionând ca mai sus, putem demonstra că, dacă 30 de vaci ar fi păscut iarba din aceeaşi luncă în 60 de zile, o vacă paşte într-o zi:

$$\frac{1+60y}{30 \cdot 60},$$

Dar cantitatea de iarbă pe care o paşte o vacă într-o zi este aceeaşi în cazul ambelor cirezi. Deci vom avea:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+60y}{30 \cdot 60},$$

de unde:

$$y = \frac{1}{480}.$$

Aflându-l pe y (creşterea cantităţii de iarbă în 24 de ore), este uşor să determinăm a cita parte din cantitatea iniţială de iarbă paşte o vacă într-o zi:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1\,600}.$$

în sfârşit, să alcătuim ecuaţia necesară rezolvării corii* plete a problemei: dacă notăm cu x numărul vacilor care ar fi putut paşte întreaga iarbă de pe luncă în 96 de zile, rezultă că:

$$\frac{1+96 \cdot \frac{1}{480}}{96\,x} = \frac{1}{1\,600},$$

de unde x = 20.

20 de vaci ar fi păscut iarba în 96 de zile. Problema Ini Newton

Să analizăm acum problema lui Newton, după modelul căreia a fost compusă problema precedentă.

De altfel, această problemă n-a fost inventată de Newton, ea este produsul creaţiei matematice populare. „Trei lunci, acoperite cu iarbă de aceeaşi desime şi cu aceeaşi viteză de creştere, au următoarele arii: 3 – ha, ’ ’ 3

10 ha şi 24 ha. Prima luncă a hrănit 12 boi timp de 4 săptămâni; a doua, 21 de boi timp de 9 săptămâni. Câţi boi poate hrăni a treia luncă timp de 18 săptămâni?

Rezolvare

Să introducem necunoscuta auxiliară y, care reprezintă cantitatea cu care creşte într-o săptămână cantitatea iniţială de iarbă de pe 1 ha. Pe prima luncă, în interval de o săptămână, sporul cantităţii de iarbă care a existat iniţial este de 3 ~ y, iar în interval de patru săptămâni,

3 – y • 4 – – y. Acelaşi lucru s-ar întânrpla dacă am presupune că aria iniţială a luncii se măreşte şi devine egală cu:

$$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y\right)$$

hectare. ’Cu alte cuvinte, boii au mâncat atâta iarbă câtă există într-o lunca cu o arie de ^3-^ + 2/) ha. Într-o săptămână, 3 2 boi au mâncat din această cantitate, iar un bou, ~ parte, deci cantitatea de iarbă existentă pe o suprafaţă de

$$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40y}{3}\right):48=\frac{10+40y}{144}$$

hectare.

Prin aceeaşi metodă calculăm suprafaţa luncii care hrăneşte un bou timp de o săptămână (din datele privind lunca a doua).

Într-o săptămână sporul la 1 ha = y,

În 9 săptămâni sporul la 1 ha – 9y, în 9 săptămâni sporul la 10 ha – 90y.

Suprafaţa luncii, care conţine rezerva de iarbă necesară pentru a hrăni 21 de boi timp de 9 săptămâni, este astfel egală cu

10 + 90y.

Deci, suprafaţa necesară pentru a hrăni un bou timp de o săptămână este de:

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}=\frac{10+90y}{189}$$

hectare. Cum cele două norme de hrănire trebuie să fie egale între ele, rezultă:

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

Eezolvând această ecuaţie, obţinem: y = -i-.

Să determinăm acum suprafaţa luncii, a cărei cantitate de iarbă este suficientă pentru hrănirea unui bou timp de o săptămână: $\frac{10+40y}{144} = \frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54}$

hectare. În sfârşit, să trecem, ia rezolvarea problemei, îfotând numărul de boi căutat prin x, avem:

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54},$$

de unde x = 36. A treia luncă poate hrăni timp de 18 săptămâni 36 de boi.

Permutarea acelor unui ceasornic

Problemă

A. Moskowski, biograful şi prietenul celebrului fizician A. Einstein, dorind să-şi distreze prietenul pe când acesta era bolnav, i-a propus următoarea problemă (fig. 9):

„Să luăm – a spus Moskowski – poziţia acelor de ceasornic la ora 12. Dacă în această poziţie orarul şi minutarul şi-ar fi schimbat reciproc poziţiile, ar indica totuşi ora exactă. În alte momente, de pildă la ora 6, schimbarea reciprocă1 a poziţiei arătătoarelor ar duce la o situaţie absurdă, inadmisibilă la un ceas care merge normal: minutarul nu poate să arate 6, atunci când orarul indică 12. Apare întrebarea: când şi cât de des acele unui ceasornic ocupă o astfel de poziţie, incit înlocuind un ac prin celălalt obţinem o soluţie nouă, posibilă pentru un ceasornic care merge normal?

— Da, răspunse Einstein, aceasta este o problemă foarte interesantă pentru un om care, din cauza bolii, este nevoit să stea în pat: destul de interesantă şi nu prea uşoară. Mă tem însă că distracţia nu va dura prea mult; am şi găsit calea de rezolvare.

Şi, ridicându-se din pat, schiţă în câteva trăsături o schemă care reprezenta condiţiile problemei. Pentru găsirea soluţiei nu i-a trebuit mai mult timp decât mi-a trebuit mie pentru formularea ei...”

Cum se rezolvă această problemă?

Hezolvate

Yom măsura distanţele acelor pe cercul cadranului de la poziţia cifrei 12, în şaizeci de zecimi din 60 de circumferinţe.

Să presupunem că una din poziţiile cerute ale acelor a fost înregistrată la un moment, în care – acul orar s-a deplasat de la cifra 12 cu x diviziuni, iar minutarul – cu y diviziuni. Deoarece acul orar parcurge cele 60 de diviziuni în 12 ore, deci 5

diviziuni pe oră, urmează că x diviziuni vor fi parcurse în – ore. Minutarul a parcurs y diviziuni

5

în decurs de y minute, adică în – ore. Cu alte cuvinte,

Oi)

minutarul a fost* în dreptul cifrei 12 cu – ore în urmă,

— 60

sau cu: $\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$

ore după ce ambele ace erau situate în dreptul cifrei 12. J Acesta este un număr întreg (cuprins între 0 şi 11), deoarece el indică câte ore întregi au trecut după 12.

După schimbarea reciprocă a poziţiilor acelor, vom găsi, în mod analog, că de la ora 12 până la ora indicată de ace au trecut $\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$

ore întregi. Acesta este, de asemenea, un număr întreg (cuprins între 0 şi 11).

Avem sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m, \\ \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n, \end{cases}$

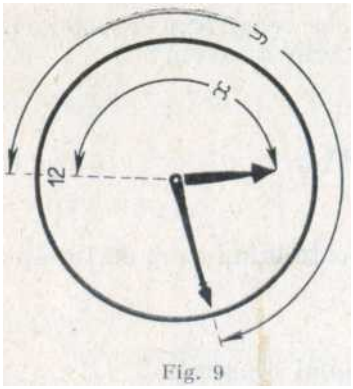


Fig. 9

unde m şi n sunt numere întregi, care iau valori între 0 şi 11. Rezolvând acest sistem obţinem:

$$x = \frac{60\,(12\,m + n)}{143}$$
$$y = \frac{60\,(12n + m)}{143}$$
>

Atribuind lui m şi n valori de la 0 la 11, vom determina toate poziţiile cerute ale acelor. Deoarece oricare din cele 12 valori ale lui m poate fi asociată cu oricare din

cele 12 valori ale lui n, s-ar părea că numărul total al soluţiilor este egal cu 12 -12 – 144. În realitate însă, acest număr este egal cu 143, deoarece la m = 0, n = 0 şi la m = 11, n – 11, poziţia acelor este aceeaşi.

La m = 11, n = 11, avem:

x = 60, y = 60, adică ceasornicul indică ora 12, la fel ca şi în cazul în care m – 0, n = 0.

Au vom analiza aci toate poziţiile posibile ale acelor; ne vom limita doar la două dintre ele.

Primul exemplu:

$$m = 1, \quad n = 1;$$
$$x = \frac{60 \cdot 13}{143} = 5\frac{5}{11} \quad y = 5\frac{5}{11},$$

5

adică ceasornicul arată ora 1 şi 5 – minute; în acest mo-

’ îi ment acele se suprapun; se înţelege că ele îşi pot schimba poziţiile reciproc (ca şi în toate celelalte cazuri de suprapunere a acelor).

Al doilea exemplu:

$$m = 8, \quad n = 5;$$
$$x = \frac{60(5 + 12 \cdot 8)}{143} \approx 42{,}38, \quad y = \frac{90(8 + 12 \cdot 5)}{143} \approx 28{,}53.$$

Momentele corespunzătoare: ora 8 şi 28,53 de minute şi ora 5 şi 42,38 de minute.

Numărul de soluţii îl cunoaştem: 143. Pentru a afla toate punctele de pe cadran care indică poziţiile cerute ale acelor, trebuie să împărţim circumferinţa cadranului în 143 părţi egale; vom obţine 143 puncte (cele căutate), în punctele intermediare, poziţiile cerute ale acelor sunt imposibile.

Coincidenţa acelor unui ceasornic

Problemă

De câte ori orarul şi minutarul unui ceasornic, care funcţionează normal, se suprapun?

Rezolvare

Putem să folosim ecuaţiile deduse la rezolvarea problemei precedente: într-adevăr, atunci când orarul şi minutarul s-au suprapus, poziţiile lor pot fi schimbate reciproc fără a modifica ora exactă. În acest caz, ambele ace au parcurs acelaşi număr de diviziuni de la cifra 12, adică x = y. Astfel, din raţionamentul problemei precedente deducem ecuaţia: $\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = m,$

unde m este un număr întreg cuprins între 0 şi 11. Din această ecuaţie obţinem:

$$x = \frac{60\,m}{11}.$$

Dintre cele 12 valori posibile ale lui m, vom obţine nu 12 ci numai 11 poziţii diferite ale acelor, deoarece pentru m =11, x = 60, adică ambele ace au parcurs 60 de diviziuni şi se află în dreptul cifrei 12; acelaşi lucru se întâmplă când m – 0.

Cei şapte jucători

Problemă

Şapte jucători s-au învoit că cel care va pierde partida să plătească celorlalţi o sumă de bani echivalentă cu cea pe care o posedă persoana respectivă – cu alte cuvinte; să dubleze banii fiecărui partener.

Au jucat şapte partide. Fiecare a pierdut câte una.

După terminarea jocului, au socotit câţi bani au fiecare. S-a aflat că toţi aveau aceeaşi sumă – 12 ruble şi 80 de copeici.

Câţi bani poseda fiecare jucător la începutul jocului?

Rezolvare

Deşi pare complicată, problema se rezolvă destul de uşor, având în vedere că în timpul jocului suma totală de bani rămânea invariabilă: banii nu făceau decât să treacă din buzunarul unuia în buzunarul altuia. De aici rezultă că la începutul jocului suma totală a fost aceeaşi ca şi la terminarea lui, adică egală cu 7-12,8 ruble.

Să urmărim cum a variat în procesul jocului suma de bani a jucătorului care a pierdut primul.

La începutul jocului, el poseda x ruble. Pierzând prima partidă, el a plătit celorlalţi 6 parteneri suma pe care o posedau aceştia, deci 7-12,8 – x. După prima partidă i-a rămas:

x – (7-12,8 – x) = 2x – 7-12,8.

După a doua partidă banii lui s-au dublat, deci

2 (2x – 7 • 12,8).

După a treia partidă, s-au dublat din nou

22 (2x – 7 • 12,8).

După a patra partidă, s-au dublat din nou

23(2x – 7 • 12,8).

După partida a şaptea, adică la terminarea jocului, el a rămas cu 12,8 ruble; prin urmare:

26 (2x – 7 • 12,8) = 12,8.

Să rezolvăm această ecuaţie:

64 (2x – 7 • 12,8) = 12,8,

2x – 7 • 12,8 = 0,2,

2x – 89,6= 0,2; x= 44,9.

Deci, la începutul jocului, primul jucător poseda 44 de ruble şi 90 de copeici.

În acelaşi fel procedăm pentru a afla banii jucătorului, care a pierdut al doilea. La începutul jocului el poseda y ruble.

După p r i m a partidă banii lui s-au dublat, deci au devenit egali cu 2y.

Partida a doua el a pierdut-o şi a plătit celorlalţi; suma de 7-12,8— 2y ruble; deci i-au rămas 2y— (7 • 32,8 – —2y) = iy – 7 • 22,8.

După a treia partida avea:

2 (4y – 7 • 12,8).

După a patra:

22(4y – 7 -12,8).

După a ş a p t e a:

25 (4y – 7 • 12,8).

Obţinem astfel ecuaţia:

25(4y – 7-12,8) = 12,8, de unde:

y = 22 ruble şi 50 copeici.

Rămâne ca cititorul să determine sumele de bani pe care le aveau ceilalţi jucători. Proba problemei o constituie faptul că suma totală, la începutul şi la finele jocului, trebuie să rămână aceeaşi.

Absurditate aparentă

Problemă

Iată o problemă care, la prima vedere, pare cu totul absurdă:

Cu ce este egal 84, dacă 8 • 8 = 54?

Această întrebare curioasă nu este totuşi lipsită de sens, şi problema poate fi rezolvată cu ajutorul ecuaţiilor. Să căutăm s-o descifrăm.

Rezolvare

Y-aţi dat seama, desigur, că numerele ce apar în problemă nu sunt scrise după sistemul zecimal – altfel întrebarea „cu ce este egal 84” ar fi absurdă. Să presupunem că baza sistemului de numeraţie necunoscut este x. În acest caz, numărul 84 înseamnă 8 unităţi de ordinul al doilea şi 4 unităţi de ordinul întâi adică:

„84” = 8z + 4.

Numărul „54” înseamnă 5x + 4.

Avem ecuaţia

8 • 8 = 5x + 4, ceea ce în sistemul zecimal înseamnă:

64 = 5a; + 4, de unde x = 12. Numerele sunt scrise în sistemul cu baza 12 şi „84” = 8 • 12 -f 4 = 100. Înseamnă că dacă 8 • 8 = = „54”, atunci: „84” = 100.

În mod analog se rezolvă şi o altă problemă de acest gen:

Cu ce este egal 100, când 5 • 6 = 33?

Ĕăspuns: 81 (în sistemul de numeraţie în baza 9).

Ecuaţia gândeşte pentru noi

Dacă vă îndoiţi de faptul că adeseori ecuaţia este mai prevăzătoare decât dv. Înşivă, rezolvaţi următoarea problemă:

„Tatăl are 32 ani, fiul, 5 ani. Peste câţi ani tatăl va fi de 10 ori mai în vârstă decât fiul?”

Să notăm mărimea căutată cu x. După x ani, tatăl va avea 32 + a? ani, iar fiul, 5 + x. Şi, deoarece la data căutată, tatăl trebuie să fie de 10 ori mai în vârstă decât fiul, avem ecuaţia:

32 + x= 10(5 + x).

Rezolvând-o deducem că x = —2.

„Peste minus 2 ani” înseamnă „cu doi ani în urmă”. Când am format ecuaţia, nu ne-am gândit la faptul că în viitor vârsta tatălui nu va întrece niciodată vârsta fiului de 3 0 ori; această situaţie a fost posibilă numai în trecut, j Ecuaţia s-a dovedit a fi mai chibzuită decât noi şi a pus în i evidenţă greşeala comisă.

Curiozităţi şi surprize

La rezolvarea ecuaţiilor ne lovim adesea de răspunsuri care pot pune în încurcătură pe un matematician neex-; perimentat şi dăm câteva exemple:

I. Să se afle un număr format din două cifre, care să posede următoarele proprietăţi: cifra zecilor să fie mai | mică decât cifra unităţilor cu 4. Dacă din numărul format i din aceleaşi cifre, dar scris în ordinea inversă, scădem numărul căutat, obţinem 27.

Îfotând cifra zecilor cu x, iar cifra unităţilor cu y, ’ putem uşor forma sistemul de ecuaţii care să dea soluţia j acestei probleme:

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27. \end{cases}$$

înlocuind în ecuaţia a doua valoarea lui x scoasă 1 din prima ecuaţie, obţinem:

10y + y – 4 – [10 (y – 4) + y] = 27, şi, după reducerea termenilor asemenea:

36 = 27.

HT-am determinat valorile necunoscutelor, în schimb] am aflat că 36 = 27... Ce înseamnă aceasta?

Aceasta înseamnă că în realitate nu există un număr j format din două cifre, care să satisfacă condiţiile cerute, 1 şi că ecuaţiile formate se contrazic. Într-adevăr, înmulţind j cu 9 ambii termeni ai primei ecuaţii, obţinem:

9y – 9a; = 36, iar din ecuaţia a doua (după desfacerea parantezelor şi 1 reducerea termenilor asemenea):

9i/ – 9x = 27,

Una şi aceeaşi valoare 9y—9x, în virtutea primei ecuaţii, este egală cu 30, iar conform ecuaţiei a doua, eu 27, Acest lucru este imposibil, deoarece 36 =j= 27.

O situaţie analogă se prezintă şi pentru cel care încearcă să rezolve următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8 \\ xy = 4. \end{cases}$$

împărţind prima ecuaţie la a doua, obţinem:

XIJ = 2, dar din compararea ecuaţiei obţinute cu ecuaţia a doua, observăm că:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ xy = 2, \end{cases}$$

adică 4=2. Deci nu există numere care să satisfacă sistemul dat. (Sistemele de ecuaţii, de tipul celor de mai sus, care nu pot fi rezolvate, se numesc incompatibile.)

II. Dacă modificăm puţin enunţul problemei precedente, vom avea o altă surpriză. Să presupunem că cifra zecilor este mai mică decât cifra unităţilor nu cu 4, ci cu 3, enunţul problemei rămânând în rest acelaşi. Ce fel de număr este acesta?

Să formăm ecuaţia. Dacă notăm cifra zecilor cu x, numărul de unităţi va fi egal cu a?. + 3. Transpunând problema în limbaj algebric, obţinem:

10 (x + 3) + x – [loz + (x + 3)] = 27.

Efectuând reducerile, ajungem la egalitatea

27 = 27.

Această egalitate este indiscutabil adevărată dar ea nu ne spune nimic despre valoarea lui x. Oare aceasta înseamnă că nu există numere care să satisfacă condiţiile problemei?

Dimpotrivă, aceasta înseamnă că ecuaţia formată de noi este o identitate, adică ea este verificată pentru orice valoare atribuită necunoscutei x. Într-adevăr, nu este

greu să ne convingem de faptul că orice număr format; din două cifre, la care cifra unităţilor este mai mare decât cifra zecilor cu 3, posedă proprietăţile enunţate în pro- ■ blemă:

111. Să se afle un număr format din trei cifre care să, posede următoarele proprietăţi:

1. Cifra zecilor să fie 7;

2. Cifra sutelor să fie mai mică decât cifră unităţilor cu 4;

3. Dacă aşezăm cifrele acestui număr în ordine in- . Versă, să obţinem un număr cu 396 mai mare decât numărul căutat.

Să formăm ecuaţia, notând cifra unităţilor cu x:

100x + 70 + x – 4 – [100 (x – 4) + 70 + x] = 396.

După efectuarea reducerilor, această ecuaţie conduce i la egalitatea

396 = 396.

Cititorii cunosc deja cum trebuie interpretat un astfel de rezultat. Aceasta înseamnă că orice număr format din trei cifre, la care prima cifră este mai mică decât cifra a treia cu 4*, se măreşte cu 396 atunci când aranjăm cifrele în ordine inversă.

Până acum am analizat probleme cu un caracter mai mult sau mai puţin artificial, teoretic; scopul lor a fost; acela de a ajuta formarea deprinderii de a forma şi rezolva ecuaţii. În cele ce vor urma, fiind înarmaţi, din punct de vedere teoretic, ne vom ocupa de unele probleme practice; – din domeniul producţiei, al vieţii de toate zilele, al artei militare, al sportului etc.

* în cazul de faţă, cifra zecilor nu joacă niciun rol.

La frizerie Problemă îi este oare necesară frizerului algebra? După cum veţi vedea, da. M-am convins de acest lucru atunci când, aflându-mă la frizerie, responsabilul mi se adresă cu o rugăminte neaşteptată:

— Ue permiteţi să vă punem o problemă pe care noi nu o putem rezolva în niciun fel?

— Şi cită soluţie am stricat pentru asta! îl completă un altul.

— În ce constă problema! am întrebat eu.

— Avem două feluri de apă oxigenată, de două concentraţii, 30% şi 3%. Trebuie s-o amestecăm astfel încât să obţinem o soluţie de 12 %. Am încercat diferite combinaţii şi nu am reuşit să aflăm proporţia corectă...

Mi s-a dat o bârtie şi proporţia cerută a fost găsită. Eezolvarea s-a dovedit a fi foarte simplă. Cum anume?

Ilezolvare

Problema poate fi rezolvată şi aritmetic, dar limbajul algebric ne conduce la un rezultat mai uşor şi mai simplu. Pentru obţinerea soluţiei de 12%, se cere să luăm x grame de apă oxigenată de 3 % şi y grame de 30 %. În felul acesta, prima cantitate va conţine 0,03 x grame perhidrol, a doua, 0,3 y grame, iar în total:

0,03z + 0,3 y.

La sfârşitul acestor operaţii, trebuie să obţinem (x -f + y) grame de soluţie, care să conţină 0,12 (a? + y) apă oxigenată pură.

Avem ecuaţia:

0,03i + 0,3y = 0,12 (x + y).

Din această ecuaţie rezultă x = 2y, adică trebuie să luăm două părţi soluţie 3% şi o parte soluţie 30%.

Tramvaiul şi pietonul

Problemă

Mergând de-a lungul unei linii de tramvai, am observat că la fiecare 12 minute mă ajunge din urmă un tramvai, iar la fiecare 4 minute întâlnesc eu unul. Atât eu, cât şi tramvaiele ne deplasăm uniform.

La ce intervale de timp pornesc tramvaiele de la capetele de linie?

Rezolvare

I) aeă tramvaiele pleacă de la capetele de linie la fiecare x minute, aceasta înseamnă că în locul unde m-am întâlnit cu unul din ele, soseşte după x minute tramvaiul următor. Atunci când un tramvai mă ajunge din urmă, înseamnă că în restul timpului de 12—a? minute, el trebuie să parcurgă drumul pe care eu îl fac în 12 minute. Deci, drumul pe care eu îl parcurg într-un minut, tramvaiul îi parcurge în minute.

12

în cazul în care tramvaiul vine în întâmpinarea mea, el mă va întâlni la 4 minute după tramvaiul care l-a precedat, iar în cele (—4) minute rămase, el trebuie să parcurgă acel drum, pe care eu am reuşit să-l parcurg în 4 minute. Prin urmare, drumul parcurs de mine într-un minut este parcurs de tramvai în-minute.

Avem deci ecuaţia

12 – x x – 4

. 12 4

Rezultă x = 6. Deci, vagoanele pleacă de la capetele de linie din şase în şase minute.

Problema poate fi rezolvată şi în felul următor (pe cale aritmetică). Să notăm distanţa dintre două tramvaie succesive prin a. Atunci distanţa dintre mine şi tramvaiul pe care îl întâlnesc se va micşora cu “ într-un minut

(deoarece tramvaiul şi cu mine parcurgem în 4 minute distanţa dintre tramvaiul care a trecut şi cel următor, care este egală cu a). În cazul în care un tramvai mă ajunge din urmă, distanta scade în fiecare minut cu Săpre- supunem acum că, timp de un minut, eu am mers înainte, după care m-am întors şi am mai mers un minut (adică m-am întors la locul de unde am plecat). În acest caz, distanţa dintre mine şi tramvaiul pe care l-am întâlnit s-a redus în primul minut cu --, iar în al doilea minut (când tramvaiul mă ajungea din urmă), cu— Deci, în decurs de

2 minute, distanta s-a redus cu – +— = – Acelaşi lucru s-ar fi întâmplat şi dacă eu aş fi stat tot timpul pe loc. Aşadar, dacă nu m-aş fi mişcat din loc timp de un minut (şi nu de două minute), tramvaiul s-ar fi apropiat de mine cu —: 2 = –, şi el ar fi parcurs întreaga distanţă a

3 6

în 6 minute. Aceasta înseamnă că, pe lângă un observator care stă pe loc, tramvaiele trec la intervale de 6 minute.

Vaporul şi plutele

Problemă

Un vapor plecat din oraşul A spre oraşul B, situat mai aproape de gura râului, a parcurs această distanţă, fără oprire, în 5 ore. La întoarcere, mergând împotriva curentului, a parcurs aceeaşi distanţă în 7 ore (se consideră că a dezvoltat aceeaşi viteză proprie şi că nu a făcut nicio oprire). În câte ore plutele plecate din A ajung în B, (ştiindu-se că ele se deplasează cu viteza de curgere a apei)?

Rezolvare

Să notăm cu x timpul (în ore) în care vaporul parcurge distanţa de la A la B în apa staţionară (adică viteza proprie de deplasare a vaporului), şi cu y timpul în care plutele parcurg această distanţă. Atunci, în timp de o oră, vaporul parcurge-din distanta AB, iar plutele, – . 1

X. Y

De aceea, în josul râului vaporul parcurge, în timp de o 1 oră, —+ – din distanta AB, iar în susul lui (împotriva I

X IJ

curentului), – . Dar din enunţul problemei ştim că 1

x y în josul apei vaporul parcurge (într-o oră)—dinântreaga)

distantă, iar în susul ei, – . Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Observăm că pentru rezolvarea acestui sistem nu este | nevoie să aducem la acelaşi numitor: este suficient să scădem ecuaţia a doua din prima. Obţinem rezultatul:

$$\frac{2}{y} = \frac{2}{35},$$

de unde y = 35. Plutele parcurg distanţa de la A la B în 35 de ore.

Două cutii cu cafea

I’robicmă

Două cutii de tablă, umplute cu cafea, an aceeaşi formă şi sunt executate din acelaşi material. Prima cutie cântăreşte 2 leg şi are înălţimea de 12 cm; a doua cântăreşte 1 kg şi are înălţimea de 9,5 cm. Ce cantitate de cafea conţin cele două cutii?

Rezolvare

Să notăm greutatea conţinutului cutiei mai mari cu x, iar a cutiei mai mici cu y. Greutatea proprie a cutiilor o notăm respectiv eu z şi t. Obţinem ecuaţiile:

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y + t = 1. \end{cases}$$

Deoarece greutăţile conţinuturilor cutiilor pline sunt proporţionale, ca şi volumele, cu cuburile înălţimilor cutiilor, * avem:

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9{,}5^3} \approx 2{,}02 \text{ sau } x = 2{,}02y.$$

Greutăţile cutiilor goale, fiind proporţionale, ca şi suprafeţele lor totale, cu pătratele înălţimilor lor, obţinem:

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9{,}5^2} \approx 1{,}60 \text{ sau } z = 1{,}60\,t.$$

Substituind valorile lui x şi z în prima ecuaţie, se obţine sistemul:

$$\begin{cases} 2{,}02y + 1{,}60t = 2, \\ y + t = 1. \end{cases}$$

Rezolvându-l, obţinem:

$$y = \frac{20}{21} = 0{,}95 \qquad t = 0{,}05.$$

Prin urmare:

x = 1,92, z = 0,08.

Deci, greutatea netă a cafelei din prima cutie este de 1,92 kg, iar din a doua de 0,94 kg.

Serata

Problemă

La o serată au fost invitate 20 de persoane. Maria a dansat cu 7 tineri, Olga – cu 8, Yeronica – cu 9 şi aşa mai departe, până la Î7ina, care a dansat cu toţi tinerii. Câţi tineri (bărbaţi) au fost la serată?

* Acest raport poate fi folosit numai în cazul în care pereţii cutiilor nu sunt prea groşi (deoarece cele două suprafeţe – exterioară şi interioară – ale cutiilor nu sunt identice şi, afară de aceasta, înălţimea cavităţii interioare a cutiei este de fapt diferită de înălţimea cutiei).

Rezolvare

Dacă alegem bine necunoscuta, problema se rezolvă foarte simplu. Yom căuta să aflăm, în primul rând, numărul fetelor, pe care îl vom nota cu x:

Prima, Maria, a dansat cu 6 + 1 tineri,

A doua, Olga, a dansat cu 6 + 2 tineri,

A treia, Veronica a dansat cu 6 + 3 tineri, -

; • •

A x-a, Nina, a dansat cu 6 -f x tineri.

Avem ecuaţia:

x + (6 + x) = 20, de unde:

x = 7, deci, numărul bărbaţilor a fost:

20 – 7 = 13.

Recunoaştere maritimă

9

Problema 1

O navă de recunoaştere a primit misiunea de a cerceta regiunea mării pe o distanţă de 70 mile*, în direcţia deplasării unei escadre. Viteza escadrei era de 15 mile pe oră, iar viteza navei de recunoaştere de 28 mile pe oră. Se cere să se determine intervalul de timp după care nava de recunoaştere s-a întors la escadră.

Rezolvare

Să notăm numărul de ore căutat cu x. În acest interval de timp, escadra a parcurs 15a? mile, iar nava de recunoaştere 28a? mile. Îâaya de recunoaştere a străbătut 70 mile, după care s-a întors o parte din drum până a întâlnit escadra care parcursese restul din drumul rămas.

* O milă marină este echivalentă cu 1,852 km (N.T.).

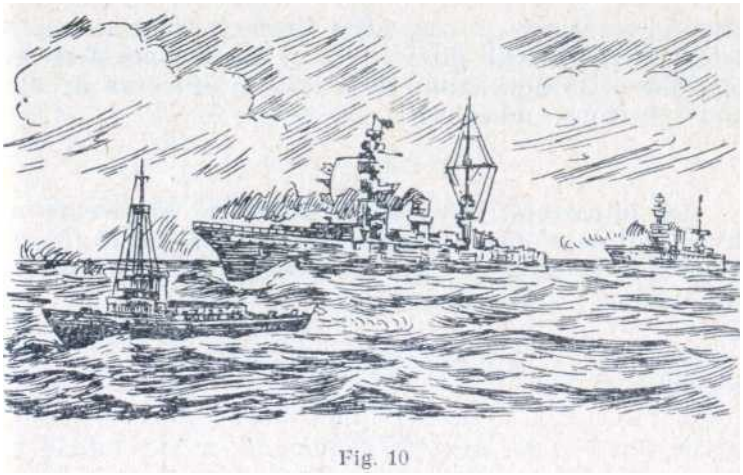


Fig. 10

împreună, ele au străbătut un drum de 28x -\- 15x mile, egal cu 2-70 mile. Rezultă ecuaţia

28x + 15x = 140, de unde $x = \frac{140}{43} = 3\frac{11}{43}$

ore. Nava de recunoaştere s-a întors la escadră după 3 ore şi 15 minute.

Problema a 1l-a

Nava de recunoaştere trebuie să cerceteze drumul din faţa escadrei în direcţia deplasării acesteia, urmând să se întoarcă după 3 ore. După cât timp trebuie să pornească înapoi spre escadră nava de recunoaştere, dacă viteza ei este de 25 noduri*, iar viteza escadrei de 15 noduri?

Rezolvare

Să presupunem că nava de recunoaştere trebuie să pornească înapoi spre escadră peste x ore; înseamnă că ea s-a depărtat de escadră timp de x ore, iar în întâmpi-

* Nodul marin este o unitate de măsură a vitezei vapoarelor echivalentă cu 15,43 mjs. (N.T.).

Narea ei a mers 3—x ore. Atâta timp cât toate „navele se deplasau în aceeaşi direcţie, nava de recunoaştere s-a depărtat de escadră, timp de x ore, cu diferenţa drumurilor parcurse, adică cu:

25. R – 15. X = 1 Ox.

La întoarcere, nava de recunoaştere a parcurs un drum egal cu 25 (3—x) noduri, iar escadra, de 15 (3—x). Împreună, escadra şi nava de recunoaştere au parcurs 10a; noduri. Prin urmare,

25 (3 – x) + 15 (3 – x) – 10x, de unde

2

x – 2 —

5

Nava de recunoaştere trebuie să-şi schimbe direcţia după 2 ore şi 24 minute de la părăsirea escadrei.

Pe Velodrom

Problemă

Pe pista circulară a unui velodrom pedalează doi ciclişti, cu viteze constante. Mergând în sensuri opuse, ei se întâlnesc la fiecare 10 secunde; mergând în acelaşi sens, unul dintre ei îl ajunge pe celălalt la fiecare 170 secunde. Care este viteza fiecăruia dintre ciclişti dacă lungimea pistei este de 170 m?

Npzolv. Ire

Dacă viteza primului ciclist este egală cu x, atunci în 10 secunde el parcurge 10 x m. Al doilea ciclist, mergând în întâmpinarea primului, parcurge de la o întâlnire la alta restul drumului, adică 1.70—10® m. Dacă notăm viteza celui de-al doilea ciclist cu y, distanţa parcursă va fi egală cu 10 y metri, deci

170 – lox = loy.

Atunci când cicliştii merg în acelaşi sens în 170 secunde primul parcurge 170 x m, iar ai doilea j70 Dacă primul merge mai repede decât al doilea de la o întâlnire la alta, el va parcurge cu un cerc mai mult decât al doilea, adică

170z – 170t/= 170.

Făcând simplificările în ecuaţii, obţinem •

x + y = 17, x – y = i, de unde

1=9, îi – 8 (metri pe secundă).

Cursa de motociclete

Problemă

La un concurs de motociclete una din cele trei motociclete, care au luat startul m acelaşi timp făcând pe oră cu 15 km mai puţin decât prima şi cu 3 pla jmj decât a treia, a sosit la punctul final cu 12 minute după prima şi cu 3 minute înaintea celei de-a treia. Cursa a fost fără opriri. ’ a

Se cere să se determine:

a) Cât de lung a fost drumul?

B) Care a fost viteza fiecărei motociclete?

C) Care a fost durata de parcurs a fiecărei motociclete?

Rezolvare

Deşi se cere să se determine şapte valori, ne putem limita la doua necunoscute, şi forma un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute.

Să notăm viteza celei de-a doua motociclete cu x În acest caz, viteza primei motociclete va fi ^ i i r/ iar a celei de-a treia x-3. + 0j

Yom nota lungimea parcursului cu y. Atunci durata cursei va fi:

pentru prima motocicletă.. V

x + lă’

pentru a doua motocicletă.. A

x

pentru a treia motocicletă., 1/

x – 3

Ştiind că a doua Inotocicletâ şi-a terminat cursa ia

12 minute după prima (adică la – ore), obţinem:

5

L _ g _ 1

x x + 15 5

A treia motocicletă sosind cu 3 minute (adică cu – |

201

ore) mai târziu decât a doua, avem:

y y ___ i x – 3 x 20

înmulţind a doua ecuaţie cu 4 şi scăzând-o din prima, ; obţinem ecuaţia:

L --J— 4 = 0.

Împărţind toţi membrii ecuaţiei prin y (după cum ştim, această mărime este diferită de zero) şi scăpând de numitori, obţinem:

(x -f 15) (x – 3) – x (x – 3) – 4x (x + 15) + 4 (x + 15) (x – 3) = 0, 1

sau, după desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor) asemenea,

3x – 225 = 0, de unde:

x = 75.

Cunoscându-l pe x, îl determinăm pe y din prima ecuaţie: j

— Y y_ = J_

75 90 5 ’

de unde y = 90.

Am determinat astfel vitezele motocicletelor:

90, 75 şi 72 km pe oră.

Lungimea întregului parcurs = 90 km. Împărţind lungimea drumului la viteza fiecărei] motociclete, aflăm durata parcursului lor:

a primei motociclete 1 oră, a celei de-a doua 1 oră şi 12 minute, a celei de-a treia 1 oră şi 15 minute.

În feiui acesta, am determinat toate cele 1 necunoscute.

Viteza medie a unui automobil

Problemă

Un automobil a parcurs distanţa dintre două oraşe mergând cu o viteză de 60 km pe oră; la întoarcere însă a mers cu 40 km pe oră. Care a fost viteza medie a automobilului?

Rezolvare

Simplitatea aparentă a problemei induce pe mulţi în eroare. Fără a pătrunde condiţiile problemei, ei calculează media aritmetică între 60 şi 40, adică află semisuma

$$\frac{60+40}{2}=50.$$

Această soluţie „simplă” ar fi corectă, dacă drumul în ambele direcţii (dus şi întors) ar fi fost de aceeaşi durată. Dar este clar că pentru drumul de întoarcere (cu o viteză mai mică) s-a pierdut mai mult timp decât pentru drumul la dus. Ţinând seama de acest fapt, este evident că răspunsul 50 nu este corect.

Şi într-adevăr, ecuaţia dă alt răspuns. Îfu este greu să formăm ecuaţia dacă introducem o necunoscută auxiliară – şi anume mărimea l, care reprezintă distanţa dintre oraşe. Notând viteza medie (cea căutată) cu x, vom putea scrie ecuaţia:

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{60}+\frac{l}{40}.$$

Întrucât l este diferit de zero, rezultă că ambii membri ai ecuaţiei pot fi împărţiţi prin l şi obţinem: $\frac{2}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40},$

de unde:

$$x = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = 48.$$

Astfel, răspunsul corect este 48 km pe oră, şi nu 50. În cazul în care am fi rezolvat problema dată în valori literale (la dus automobilul a mers cu o viteză de a km pe oră, iar la întoarcere cu b km pe oră), am fi obţinut ecuaţia:

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{a} + \frac{l}{b},$$

de unde rezultă pentru x valoarea

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Mărimea x se numeşte media armonică a mărimilor a şi b.

Deci, viteza medie nu este dată de media aritmetică, ci de media armonică a vitezelor de deplasare. Dacă a şi b sunt numere pozitive, media armonică este, întotdeauna, mai mică decât media aritmetică:

$$\frac{a+b}{2},$$

lucru de care ne-am convins din exemplul numeric (48 este mai mic decât 50).

Maşini de calculat rapide

Vorbind despre ecuaţii algebrice în cadrul Algebrei 1 distractive, nu putem să nu amintim problema rezolvării j ecuaţiilor cu ajutorul maşinilor de calculat. După cum am spus, maşinile de calculat pot „juca” şab. Dar maşinile | matematice pot executa şi alte operaţii, de exemplu tra- 1 ducerea dintr-o limbă într-alta, orchestraţia unei compoziţii muzicale etc. Pentru aceasta trebuie elaborat doar un l „program” corespunzător, după care să acţioneze maşina.

Se înţelege că noi nu vom analiza aici „programele” jocului de şah sau ale traducerii dintr-o limbă în alta, ele fiind extrem de complicate, ci vom analiza numai două programe foarte simple. Înainte însă vom spune câteva cuvinte despre construcţia maşinilor de calculat.

În Capitolul I am vorbit despre’ dispozitivele cu ajutorul cărora se pot face mii şi zeci de mii de calcule pe secundă. Această parte a unei maşini de calculat, care efectuează direct operaţiile, se numeşte dispozitiv aritmetic. Afară de aceasta, maşina are un dispozitiv de comandă (care reglează funcţionarea întregii maşini) şi o aşa-zisă „memorie”. Memoria, sau dispozitivul de memorare, estfe un sistem de numere şi semnale convenţionale, în sfârşit, maşina este prevăzută cu dispozitive speciale pentru introducerea datelor numerice noi şi pentru eliberarea rezultatelor obţinute. Aceste rezultate sunt imprimate (în sistemul zecimal) pe fişe speciale.

Ştim cu toţii că sunetul poate fi înregisţrat pe un disc sau pe o bandă de magnetofon şi apoi reprodus. Dar înregistrarea sunetului pe disc poate fi făcută o singură dată, pentru o nouă înregistrare fiind nevoie de un alt disc. La magnetofon sunetul se înregistrează magnetizându-se o bandă specială. Sunetul înregistrat poate fi reprodus de câte ori vrem, iar atunci când nu ne mai este necesar, banda poate fi „demagnetizată” putându-se înregistra altceva. Pe una şi aceeaşi bandă se pot face câteva înregistrări (una după alta), cu condiţia ca pentru fiecare înregistrare nouă să fie „ştearsă” înregistrarea precedentă.

Pe acelaşi principiu se bazează funcţionarea dispozitivelor de memorie. Âumerele şi semnalele convenţionale sunt înregistrate (cu ajutorul semnalelor electrice, magnetice sau mecanice) pe un tambur special, pe o bandă sau pe un alt dispozitiv. După nevoie, numărul înregistrat poate fi citit sau şters, iar în locul lui poate fi înregistrat un alt număr. „Memorarea” şi „citirea” unui număr sau a unui semnal convenţional durează doar câteva milionimi de secundă.

„Memoria” poate cuprinde câteva mii de „celule”, iar fiecare celulă – câteva zeci de elemente, de exemplu magnetice. Pentru înregistrarea numerelor în sistemul de numeraţie binar, vom conveni ca fiecare element magne- tizat să fie reprezentat prin cifra 3, iar fiecare element nemagnetizat prin cifra 0. Să presupunem că fiecare celulă de memorie conţine 25 elemente sau, cum se spune „25 ordine sau poziţii binare, unde primul element serveşte ■ pentru notarea seninului numărului (+ sau —), următoarele 14 poziţii servesc pentru înregistrarea numerelor

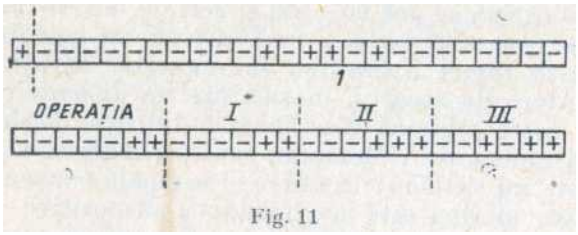


Fig. 11

întregi, iar ultimele 10 poziţii pentru înregistrarea părţii fracţionare. În fig. 11 este dată reprezentarea schematică a două celule de memorie, fiecare din ele conţinând câte 25 ordine. Elementele magnetizate sunt notate prin semnul +, iar cele nemagnetizate prin semnul – . Să analizăm prima celulă, cea de sus, (virgula arată unde începe partea fracţionară a numărului, iar linia întreruptă desparte prima poziţie, care serveşte pentru înregistrarea semnului, de celelalte). În această celulă este înregistrat (în sistemul de numeraţie binar) numărul +1011,01 sau, în sistemul zecimal, numărul 11,25.

Afară de numere, în celulele memoriei sunt înregistrate comenzile, din care este compus programul. Să vedem cum arată comenzile destinate pentru o aşa-numită „maşină cu trei adrese”. În acest caz, la înregistrarea unei comenzi, celula de memorie se împarte în patru părţi (liniile întrerupte la celula de jos din fig. 11). Prima parte serveşte pentru notarea operaţiei şi este înregistrată cu numere. De exemplu:

adunare – operaţia I, scădere – operaţia a II-a, înmulţire – operaţia a III-a etc.

Comenzile se descifrează în felul următor: prima parte a celulei – numărul operaţiei, părţile a doua şi a treia – numerele celulelor (adresele), din care trebuie luate numerele pentru efectuarea operaţiei date, partea a patra – numărul celulei (adresa) unde urmează a fi dirijat rezultatul obţinut. Astfel, în fig. 11 (celula de jos) sunt înregistrate, în sistemul binar, numerele 11, 11, 111, 1011 sau în sistemul zecimal: 3, 3, 7, 11, ceea ce înseamnă următoarea comandă: să se efectueze operaţia a III-a (adică înmulţirea) a numerelor aflate în celulele de memorare a treia şi a şaptea, iar rezultatul obţinut să fie „memorat” (adică înregistrat) în celula a 1l-a.

Pe viitor vom desemna numerele şi comenzile nu prin semne convenţionale, aşa cum se arată în fig. 11, ci direct în sistemul de numeraţie zecimal. Deci, comanda reprezentată în celida de jos din fig. 11 va fi înregistrată astfel:

înmulţire 3 7 11

Să analizăm acum două exemple de programe simple.

Programul I

1) adunare	4	5	4
2) înmulţire	4	4	→
3) predarea conducerii			1
4)	0		
5)	1		

Să vedem cum va lucra maşina, dacă în primele cinci celule sunt înregistrate aceste date.

Comanda 1: adunarea numerelor înregistrate în celulele 4 şi 5, şi dirijarea rezultatului obţinut din nou în celula a 4-a (în locul numărului care fusese înscris mai înainte). În felul acesta, maşina va înregistra în celula a 4-a numărul 0 +1 =1. După executarea primei comenzi, în celulele 4 şi 5 vor figura următoarele numere:

4) 1,

5) 1.

Comanda a 2-a: înmulţirea cu el însuşi a numărului aflat în celula a 4-a (adică ridicarea la pătrat) şi imprimarea rezultatului, adică a lui l2, pe fişă (săgeata arată eliberarea rezultatului obţinut).

Comanda a 3-a: predarea conducerii celulei 1. Cu alte cuvinte, aceasta înseamnă că trebuie efectuate din nou toate comenzile, începând cu prima. Deci, din nou comanda 1.

Comanda 1: Adunarea numerelor aflate în celulele 4 şi 5 şi înregistrarea rezultatului obţinut din nou în celula a 4-a. Ca urmare, în celula a 4-a va figura numărul 1 + + 1=2:

4) 2,

5) 1.

Comanda a 2-a: ridicarea la pătrat a numărului aflat în celula a 4-a şi trecerea pe fişă a rezultatului obţinut, adică a lui 22.

Comanda a 3-a: predarea conducerii celulei 1 (deci din nou revenire la comanda 1).

Comanda 1: trimiterea numărului 2+1 = 3 în celula a 4-a:

4) 3,

5) 1.

Comanda a 2-a: înregistrarea pe fişă a numărului 32*

Comanda a 3-a: predarea conducerii celulei 1 etc.

Astfel, maşina calculează unul după altul pătratele numerelor întregi şi le înregistrează pe fişă. Observaţi că, de fiecare dată, maşina ia pe rând singură numerele întregi şi le ridică la pătrat. Acţionând după acest program, maşina poate calcula pătratele tuturor numerelor întregi de la 1 la 10 000 într-un interval de câteva zeci de secunde.

Trebuie subliniat faptul că în realitate programul pentru calcularea pătratelor numerelor întregi este mai complicat decât cel arătat. Acest lucru se referă, în primul rând, la comanda a 2-a, deoarece pentru imprimarea rezultatului pe fişă este nevoie de mai mult timp decât pentru efectuarea unei operaţii. De aceea, rezultatele obţinute se „memorează” în celulele libere din memorie, iar după aceea („fără grabă”) sunt imprimate pe fişe. În felul acesta, primul rezultat final este „memorat” în prima celulă liberă din memorie, rezultatul al doilea – în cea de a 2-a celulă liberă, al treilea rezultat – în cea de-a 3-a celulă etc. În programul simplificat de mai sus nu s-a ţinut seama de acest fapt.

Afară de aceasta, maşina nu poate să se ocupe mult timp cu calcularea pătratelor, nu-i vor ajunge celulele din „memorie”, şi a putea „ghici” momentul în care maşina a terminat de calculat numărul cerut de pătrate, pentru a fi deconectată, este imposibil (căci maşina efectuează mii de operaţii pe secundă!). De aceea, sunt prevăzute comenzi speciale pentru oprirea maşinii la momentul oportun. De pildă, un program poate fi întocmit în *işa fel, încât maşina să se oprească automat după ce a calculat pătratele tuturor numerelor întregi de la 1 la 10 000.

Există şi alte feluri de comenzi mai complicate, asupra cărora nu ne vom opri aici.

Iată cum arată în realitate programul pentru calcularea pătratelor tuturor numerelor întregi de la 1 la 10 000:

Programul I

1) adunare	8	9	8
2) înmulțire	8	8	10
3) adunare	2	6	2
4) predarea condiționată a conducerii	8	7	1
5) stop			
6)	0	0	1
7) 10 000			
8) 0			
9) 1			
10) 0			
11) 0			
12) 0			

Primele două comenzi se deosebesc puţin de cele din programul simplificat de mai înainte. După executarea acestor două comenzi, în celulele a 8-a, a 9-a şi a 10-a vor figura următoarele numere:

8)	1
9)	1
10)	1^2

Comanda a 3-a este foarte interesantă: se adună numerele din celulele a 2-a şi a 6-a, iar rezultatul obţinut trebuie înregistrat din nou în celula a 2-a, după care aceasta va avea aspectul următor:

2) înmulţire 8 8 11.

După cum vedeţi, după executarea celei de-a 3-a comenzi, comanda a 2-a se schimbă, mai precis se schimbă una din adresele comenzii a 2 – a. În cele ce vor urma, vom explica în ce scop se face acest lucru.

Comanda a 4-a: predarea condiţionată a conducerii (în locul comenzii a 3-a din programul analizat mai înainte). Această comandă se execută astfel: dacă numărul din celula a 8-a este mai mic decât numărul din celula a 7-a, conducerea este predată celulei 1; în caz contrar, este executată comanda următoare (adică a 5-a). În cazul nostru, dat fiind că 1 < 10 000, predarea conducerii se face către celula 1 şi revenim astfel la comanda 1.

După executarea primei comenzi, în celula a 8-a va figura numărul 2.

A doua comandă, care de data aceasta se prezintă sub forma

2) înmulţire 8 8 11, constă în aceea că numărul 22 este dirijat în celula a 1l-a. Acum devine clar de ce comanda a 3-a a fost executată înaintea comenzii a 2-a: numărul nou, adică 22, nu trebuia să ajungă în celula a 10-a, care este ocupată, ci în celula următoare (a 1l-a). După executarea comenzilor 1 şi a 2-a, vom avea următoarele numere:

8) 2

9) 1

10) l2

11) 22.

După executarea comenzii a 3-a, celula a 2-a va avea aspectul

2) înmulţire 8 8 12.

Deoarece în celula a 8-a continuă să figureze un număr mai mic, decât în celula a 9-a, comanda a 4-a înseamnă din nou predarea conducerii celulei 1.

Acum după executarea comenzilor 1 şi a 2-a, obţinem:

8) 3

9) 1

10) l2

11) 22

12) 32

Maşina va continua să calculeze pătratele după acest program, până când în celula a 8-a va apare numărul 10 000, adică până când vor fi calculate pătratele numerelor de la 1 la 10 000. După aceea, comanda a 4-a nu va mai preda conducerea celulei 1 (deoarece în celula a 8-a va figura un număr egal cu cel din celula a 7-a şi nu mai mic); deci, după comanda a 4-a maşina va executa comanda a 5-a: aci se va opri (se va deconecta).

Să analizăm acum un program mai complicat: rezolvarea sistemelor de ecuaţii. Pentru ca expunerea să fie mai clară, vom simplifica întrucâtva acest program; cititorul va putea să-şi dea seama singur cum arată programul în forma sa completă.

Fie sistemul de ecuaţii

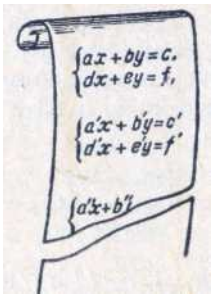
$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Acest sistem nu este greu de rezolvat:

$$x = \frac{c\,e - b\,f}{ae - bd}, \quad y = \frac{a\,f - c\,d}{ae - bd}.$$

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem (cu valori numerice date ale coeficienţilor a, b, c, d, e, /), unui om îi sunt necesare câteva zeci de’ secunde. Maşina poate rezolva sute de asemenea sisteme într-o secundă.

Să analizăm programul corespunzător. Yom presupune că sunt date câteva din aceste sisteme:



cu valori numerice date pentru coeficienţii a, b, c, d, e, f, a', b'...

Tată programul corespunzător:

Programul II

1) ×	28	30	20	14) +	3	19	3	27) *b*
2) ×	27	31	21	15) +	4	19	4	28) *c*
3) ×	26	30	22	16) +	5	19	5	29) *d*
4) ×	27	29	23	17) +	6	19	6	30) *e*
5) ×	26	31	24	18)	p.c.		1	31) *f*
6) ×	28	29	25	19)	6	6	0	32) *a'*
7) −	20	21	20	20)	0			33) *b'*
8) −	22	23	21	21)	0			34) *c'*
9) −	24	25	22	22)	0			35) *d'*
10) :	20	21	→	23)	0			36) *e'*
11) :	22	21	→	24)	0			37) *f'*
12) +	1	19	1	25)	0			38) *a''*
13) +	2	19	2	26)	*a*			. . . .

Comanda 1: să se afle produsul numerelor din celulele 28 şi 30, iar rezultatul să fie dirijat în celula a 20-a. Cu alte cuvinte, în celula a 20-a va figura numărul ce. I în mod analog se execută comenzile a 2-a şi a 6-a. I După executarea lor în celulele a 20-a şi a 25-a vor figura următoarele numere:

20) ce
21) bf
22) ae
23) bd
24) af
25) cd

— 0

Comanda a 7-a: din numărul aflat în celula a 20-a,] să se scadă numărul aflat în celula a 2l-a, iar rezultatul (adică ce – bf) să fie înregistrat din nou în celula a 20-a. J în mod analog se execută comenzile a 8-a şi a 9-a. | Ca urmare, în celulele a 20-a, a 2l-a şi a 22-a vor figura j următoarele numere:

20) $ce-bf$
21) $ae-bd$
22) $af-cd.$

Comenzile a 10-a şi a 1l-a: se formează citurile:] $\frac{ce-bf}{ae-bd}$ şi $\frac{af-cd}{ae-bd}$

care sunt imprimate pe o fişă (adică sunt eliberate ca rezultate finale). Ele reprezintă valorile necunoscutelor, obţinute din primul sistem de ecuaţii.

Deci, primul sistem a fost rezolvat. Atunci la ce sunt necesare comenzile ulterioare? Partea următoare a programului (celulele 12 şi 19) trebuie să determine maşina „să treacă” la rezolvarea celui de-al doilea sistem de ecuaţii. Să vedem cum anume.

Comenzile 10 şi 17 constau în aceea că, la conţinutul celulelor 1 şi 6, se adaugă înregistrarea din celula a 19-a, iar rezultatele obţinute rămân mai departe în celulele 1 şi 6. În felul acesta, după executarea comenzii a 17-a, primele 6 celule vor avea următorul aspect:

1) x 34 36 20

2) x 33 37 21

3) x 32 36 22

4) x 33 35 23

5) x 32 37 24

6) x 34 35 25

Comanda a 18-a: să se predea conducerea primei celule.

Prin ce se deosebesc noile înregistrări din primele 6 celule de înregistrările anterioare? Prin aceea că primele două adrese din aceste celule nu conţin numerele de la 26 la 31, ca mai înainte, ci pe acelea de la 32 la 37. Cu alte cuvinte, maşina va executa din nou aceleaşi operaţii, dar numerele vor fi luate nu din celulele 26 şi 31, ci din celulele 32 şi 37, unde se află termenii celui de-al doilea sistem de ecuaţii. După rezolvarea lui, maşina va trece la rezolvarea celui de-al treilea sistem etc.

După cum am văzut, maşina nu „ştie” să lucreze „singură”, nu poate decât să execute un „program” dat, deci pentru a obţine rezultatele necesare trebuie întocmit un „program” de lucru bun. Există programe pentru calculul rădăcinilor, al logaritmilor, al sinusurilor, pentru rezolvarea ecuaţiilor de grad superior şi altele. Am mai spus că există programe pentru jocul de şah, pentru traducerea textelor dintr-o limbă într-alta… Se înţelege ca programul corespunzător va fi cu atât mai complicat cu cât problema este mai complicată.

În încheiere, vom aminti că există aşa-numite programe de programare, cu ajutorul cărora maşina însăşi poate să întocmească programul necesar rezolvării unei probleme. Acest fapt uşurează considerabil întocmirea programului, care cere adesea foarte multă muncă.

Capitolul iii ÎN AJUTORUL ARITMETICII

Adeseori aritmetica nu este în măsură să demonstreze riguros adevărul unora dintre afirmaţiile sale, numai cu metode proprii. Din această cauză, ea este nevoită să recurgă la metodele de generalizare ale algebrei. Printre aceste cazuri aritmetice, care trebuie demonstrate pe cale algebrică, se numără multe reguli de efectuare simplificată a calculelor, unele proprietăţi interesante ale numerelor, criterii de divizibilitate etc. În capitolul de faţă vor fi analizate o serie de probleme de acest gen.

Înmulţirea rapidă

Pentru simplificarea calculelor, calculatorii experimentaţi recurg adesea la transformări algebrice. De exemplu, calculul

9882

se efectuează astfel:

988 • 988 = (988 + 12) • (988 – 12) + 122 = 1000 • 976 + 144 = 976 144.

Este uşor de observat că, în cazul de faţă, calculatorul foloseşte următoarea transformare algebrică:

cfi = a2 – 62 -f 62 = (a + b) (a – b) -f- b2.

În practică se poate folosi cu succes această formulă în calculele mintale.

De exemplu:

$$
\begin{aligned}
27^2 &= (27+3)(27-3)+3^2 = 729,\\
63^2 &= 66\cdot 60+3^2 = 3\,969,\\
18^2 &= 20\cdot 16+2^2 = \quad 324,\\
37^2 &= 40\cdot 34+3^2 = 1\,369,\\
48^2 &= 50\cdot 46+2^2 = 2\,304,\\
54^2 &= 58\cdot 50+4^2 = 2\,916.
\end{aligned}
$$

W ’

Mai departe, înmulţirea 986 • 997 se face astfel:

986 • 997 = (986-3) • 1 000 + 3 • 14 = 983 042.

Pe ce se bazează acest procedeu? Să reprezentăm; termenii sub forma:

(1 000-14) • (1 000-3)

şi să înmulţim aceste binoame după regulile algebrei: j

1 000 • 1 000-1 000 • 14-1 000 • 3 + 14 • 3

Efectuăm transformările:

1 000 (1 000 – 14) – 1 000 -3 + 14 • 3 =

= 1 000 • 986-1 000 • 3 + 14 • 3 =

= 1 000 (986-3) + 14 -3.

Ultimul rând reprezintă procedeul folosit de calculator. I Este interesantă metoda de înmulţire a două numere formate din 3 cifre, la care cifra zecilor este aceeaşi, iar suma unităţilor – egală cu 10. De exemplu, înmulţirea

783 • 787

se efectuează astfel:

78 • 79= 6 162; 3 • 7 = 21; iar rezultatul va fi:

616 221.

Justificarea metodei folosite rezultă din următoarele | transformări:

(780 + 3) (780 + 7) =

= 780 • 780 + 780 • 3 + 780 • 7 + 3 • 7 =

— 780 • 780 + 780 • 10 —)— 3*7 =

= 780 (780 + 10) + 3 *7 = 780 • 790 +21 =

= 616 200 + 21.

O altă metodă pentru efectuarea unor înmulţiri de acest fel este şi mai simplă:

783 • 787 = (785-2) (785 + 2) = 7852-4 =

= 616 225-4 = 616 221.

În acest din urmă exemplu am avut de ridicat la pătrat \ numărul 785. *»

Pentru ridicarea la pătrat a numerelor care se termină eu cifra 5, este foarte utilă următoarea metodă:

$35^2; 3 \cdot 4 = 12$ Răspuns 1 225.
$65^2; 6 \cdot 7 = 42$ Răspuns 4 225.
$75^2; 7 \cdot 8 = 56$ Răspuns 5 625.

Eegula constă în înmulţirea cifrei zecilor cu cifra imediat superioară ei, şi la produsul obţinut se ataşează numărul 25.

Procedeul se bazează pe următoarele considerente: dacă cifra zecilor este a, întregul număr poate fi reprezentat astfel:

10a + 5.

Pătratul acestui număr, ca pătrat al unui binom, va fi egal cu:

100 a2 + 100 a + 25 = 100 a (a + 1) + 25.

Termenul a (a +1) reprezintă produsul dintre cifra zecilor şi cifra imediat superioară. A înmulţi numărul obţinut cu 100 şi a aduna la el 25 sau a adăuga la numărul obţinut 25 este acelaşi lucru.

Tot din acest procedeu rezultă o altă metodă simplă de a ridica la pătrat numerele formate dintr-un număr întreg şi i. De exemplu:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3,5^2 = 12,25 = 12\frac{1}{4},$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4},$$
$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4} \text{ etc.}$$

Cifrele 1, 5 şi 6

Probabil aţi observat că la înmulţirea unei serii de numere care se termină cu cifra 1 sau 5, se obţine un număr terminat cu aceeaşi cifră. Este însă mai puţin cunoscut

faptul că acelaşi lucru este adevărat şi pentru cifra 6. De aceea, orice putere a unui număr terminat cu cifra 6 se termină de asemenea cu 6.

De exemplu:

462 = 2116; 46» = 97 336.

Această proprietate interesantă a cifrelor 1, 5 şi C poate 1 fi demonstrată pe cale algebrică. S-o analizăm pentru 1 cifra 0.

Numerele terminate cu 6 pot fi reprezentate astfel: î

10a + 6, 1 Oft + 6 etc.

Unde a şi b sunt numere întregi.

Produsul acestor două numere este egal cu:

$$100\,ab + 60\,b + 60a + 36 =$$
$$= 10\,(10\,ab + 6b + 6a) + 30 + 6 =$$
$$= 10\,(10\,ab + 6b + 6a + 3) + 6.$$

După cum se vede, produsul este format dintr-un: număr de zeci şi din cifra 6 care, se înţelege, trebuie să] fie la urmă.

Aceeaşi demonstraţie poate fi folosită şi pentru cifrele 1 şi 5.

Cele spuse ne îndreptăţesc să afirmăm că:

386^{2567} se termină cu 6,
825^{723} se termină cu 5,
491^{1732} se termină cu 1 etc.

Numerele 25 şi 76

Există şi numere formate din două cifre, care posedă aceeaşi proprietate ca şi cifrele 1, 5 şi 6. Ele sunt numărul 25 şi, – pentru mulţi va fi o surpriză – numărul 76.] Produsul a două numere terminate cu 76 se termină de j asemenea cu 76.

Să demonstrăm acest lucru. Expresia generală pentru aceste numere va fi:

100 a + 76, loot + 76 etc.

Înmulţind între ele două numere de acest fel, obţi" \ nem:

$$10\,000\,ab + 7\,600\,b + 7\,600\,a + 5\,776 =$$
$$= 10\,000\,ab + 7\,600\,b + 7\,600\,a + 5\,700 + 76 =$$
$$= 100\,(100\,ab + 76\,b + 76\,a + 57) + 76.$$

Afirmaţia este demonstrată: produsul se termină cu 76. De aici rezultă că orice putere a unui număr termin at cu 76 ya fi un număr terminat tot cu 76:

3762 = 141 376, 5763 = 191 102 976 etc.

„Numere” infinite

Există şi grupuri mai mari de cifre care, aflându-se la sfârşitul numerelor, se păstrează şi în produsul lor. Vom arăta că numărul acestor grupuri este infinit.

Cunoaştem deja grupuri de numere formate din două cifre care posedă proprietatea enunţată: 25 şi 76. Pentru a găsi grupuri formate din trei cifre, trebuie să punem înaintea numărului 25 sau a numărului 76 o astfel de cifră, încât grupul de trei cifre obţinut să posede proprietatea cerută.

Să vedem, de exemplu, ce cifră trebuie să adăugăm la numărul 76. Să o notăm cu litera A\’ Atunci numărul căutat va fi de forma:

100 * + 76.

Expresia generală a numerelor terminate cu acest grup de cifre va fi:

1 000 a -f 100* + 76; 1 000 b + 100* + 76 ş.a.m.d.

Înmulţind între ele două numere de acest fel, obţinem:

$$1\,000\,000\,ab + 100\,000\,ak + 100\,000\,bk + 76\,000\,a + 76\,000\,b + 10\,000\,k^2 + 15\,200\,k + 5\,776.$$

Toţi termenii, afară de ultimii doi, au la urmă cel puţin trei zerouri. De aceea, produsul se termină cu 100/c + 76, dacă diferenţa

$$15\,200\,k + 5\,776 - (100\,k + 76) = 15\,100\,k + 5\,700 = 15\,000\,k + 5\,000 + 100\,(k + 7)$$

este divizibilă prin 1 000. Acest lucru va fi adevărat numai pentru k = 6.

Deci, grupul de cifre căutat va fi de forma 376. De aceea şi orice putere a numărului 376 se termină cu 376.

De exemplu:

3762= 141 376.

Dacă am dori să aflăm un grup de numere format din patru cifre, care să posede aceeaşi proprietate, va trebui să scriem înaintea numărului 376 încă o cifră. Însemnând această cifră cu l, vom ajunge la următoarea problemă: pentru ce valoare a lui l produsul:

(10 000 a + 1 000 l + 376) (10 000 b + 1 000 l + 376)

se va termina cu 1000 î+ 376? Dacă în acest produs desfacem parantezele şi facem abstracţie de toţi termenii sumei care se termină cu cel puţin 4 zerouri rămân termenii:

752 000/ + 141 376.

> l

Produsul se termină cu 1000 l + 376, atunci când diferenţa

$$752\,000\,l + 141\,376 - (1000\,l + 376) = 751\,000\,l + 141\,000 = (750\,000\,l + 140\,000) + 1\,000\,(l + 1)$$

este divizibilă prin 10 000. Acest lucru este adevărat numai dacă l – 9.

Grupul căutat este 9 376.

Continuând raţionamentul de mai sus, grupul de patru cifre obţinut poate fi completat cu încă o cifră. Se obţine 09 376. Continuând astfel obţinem grupul 109 376, apoi 7 109 376 etc. Deci putem repeta operaţia de o infinitate de ori. În concluzie, vom obţine un „număr” format dintr-o infinitate de cifre:

...7 109 376.

Asemenea „numere” pot fi adunate şi înmulţite după regulile obişnuite: într-adevăr, ele se scriu de la dreapta la stânga, iar adunarea şi înmulţirea (în coloane) se fac,. J de asemenea, de la dreapta la stânga, astfel încât făcând suma sau produsul numerelor date se pot calcula pe rând oricâte cifre.

Este interesant că „numărul” infinit de mai sus satisface, oricât ar fi de curios, ecuaţia

X2 = X.

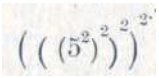
Într-adevăr, pătratul acestui „număr” (adică numărul înmulţit prin el însuşi) se termină cu 70, deoarece fiecare dintre factori se termină cu 76; tot din această cauză pătratul „numărului” dat se termină cu 376; se termină cu 9 376 etc. Cu alte cuvinte, caleulând una după alta cifrele „numărului” x2, unde x =...7 109 376, obţinem aceleaşi cifre, care figurează în numărul x, astfel că x2 = x.

Am analizat grupurile de cifre terminate cu 76 *. Dacă vom urma acelaşi raţionament pentru grupurile de cifre terminate cu 5, vom obţine:

5, 25, 625, 0625, 90 625, 890 625, 2 890 625 etc.

Ca urmare, vom putea scrie încă un „număr” infinit

...2 890 625, care satisface de asemenea ecuaţia x2 = x. S-ar putea demonstra că acest „număr” infinit „este egal” cu:



în limbajul „numerelor”, infinite, acest interesant rezultat se formulează astfel: ecuaţia x2 = x are (afară de soluţiile banale x = 0 şi x = 1) două soluţii „infinite”:

a =... 7 109 376 şi x =... 2 890 625

şi nu mai are alte soluţii (în sistemul zecimal) **.

* Subliniem că grupul de două cifre 76 poate fi determinat cu ajutorul raţionamentelor de mai sus; pentru aceasta este suficient să găsim cifra ce trebuie aşezată înaintea lui 6, astfel încât grupul de două cifre obţinut să posede proprietatea enunţată. De aceea, „numărul”... 7 109 376 poate fi obţinut pornind nu de la 76, ci de la cifra 6.

** Numerele „infinite” pot fi analizate atât în sistemul zecimal, cât şi în alte sisteme de numeraţie. Astfel, numerele cu sistemul de numeraţie în baza p se numesc p-aditive. Despre aceste numere puteţi afla câte ceva din cartea lui E. B. D î n k i n şi V. A. U s p e n s k i, Discuţii matematice, Gostehizdat. 1952.

Plata suplimentară

Veche problemă populară

Cândva, în vremuri de demult, doi negustori de vite | au vândut o cireadă de boi, încasând pentru fiecare bou atâtea ruble câţi boi aveau în cireadă. Cu banii obţinuţi, 1 au cumpărat o turmă de oi, plătind câte 10 ruble pentru o oaie cu un miel. Împărţind turma în părţi egale, unul dintre ei a căpătat cu o oaie, iar celălalt cu un miel mai J mult, primind însă în plus o sumă suplimentară. Cât de J mare a fost această sumă (se presupune că este exprimată | de un număr întreg de ruble)?

Rezolvare

Problema nu poate fi transpusă direct în „limbaj j algebric”, deoarece nu poate fi pusă în ecuaţie. Ea trebuie rezolvată într-un mod deosebit, să spunem aşa cu ajutorul unui raţionament matematic liber. Dar şi de data aceasta algebra dă un ajutor esenţial aritmeticii.

Costul în ruble a întregit turme este un pătrat perfect, deoarece turma fusese cumpărată pe banii obţinuţi din vânzarea a n boi cu câte n ruble pentru fiecare bou. Unuia din tovarăşi i-a revenit o oaie în plus, deci numărul de oi a fost impar; urmează că şi numărul zecilor din n2 a fost impar; atunci care este cifra unităţilor?

Se poate demonstra că, dacă într-un pătrat perfect numărul zecilor este impar, cifra unităţilor nu poate fi alta decât 6.

Într-adevăr, pătratul oricărui număr format dintr-un număr de a zeci şi b unităţi, adică (10 a + b)2, este egal cu

100 a2 + 20 ab + b2 = (10a2 + 2 ab) ■ 10 + b2.

În cazul dat, numărul zecilor este 10a2 -f 2ab şi un număr oarecare de zeci cuprins în b2. Dar 10a2 + 2ab se divide prin 2, deci este un număr par. De aceea, numărul zecilor, conţinut în (10a + b)2, va fi impar, atunci când numărul b2 va cuprinde un număr impar de zeci. Să ne amintim ce reprezintă b2. Acesta este pătratul unităţilor, adică unul din următoarele zece numere:

0, 1,4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Dintre acestea, numerele care conţin un număr impar de zeci sunt numai 16 şi 36 – ambele terminându-se cu 6. Deci, pătratul perfect

100 a2 + 20 ab + b°-

poate avea un număr impar de zeci numai în cazul în care se termină cu 6.

Acum este uşor să găsim răspunsul la problemă. Devine clar că mielul a fost evaluat la 6 ruble. Negustorul, căruia i-a revenit mielul, a primit cu 4 ruble mai puţin decât

tovarăşul lui, care a primit o oaie în plus. Ca să se egaleze părţile, proprietarul mielului a primit o sumă suplimentară de 2 ruble.

Plata suplimentară este de 2 ruble.

Divizibilitatea prin 11

Algebra uşurează în mod simţitor aflarea criteriilor de divizibilitate a unui număr prin altul, fără a recurge la împărţire. Criteriile de divizibilitate prin 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 sunt binecunoscute. Să deducem acum criteriul de divizibilitate prin 11; el este destul de simplu şi practic.

Să presupunem că un număr N format din mai multe cifre are cifra unităţilor a, cifra zecilor b, cifra sutelor c, cifra miilor d etc., adică

$$N = a + 10b + 100c + 1\,000d + \ldots = \\ = a + 10\,(b + 10c + 100d + \ldots),$$

unde punctele arată suma ordinelor următoare. Să scădem din A numărul 11 {b + 10c + lood +...), care este un multiplu de 11. Atunci diferenţa obţinută a – b – 10 (c + 10 d +...), împărţită la 11, va da acelaşi rest ca şi numărul A. Adăugând la acest rest numărul ll (c + 10 «? +...), iarăşi un multiplu al lui 11, obţinem numărul a – b + e + 10 (d +...), care împărţit la 11 dă, de asemenea, acelaşi rest ca numărul A. Scăzând din acest număr ll (d + • • •) > obţinem din nou un multiplu al lui 11, etc. Din rezultate, obţinem astfel numărul o. —1 c – ^ +... = (a + e + • • •)— (P -\- d • ■•)

care împărţit la 11, va da şi el acelaşi rest ca N.

De aci reiese următorul criteriu de divizibilitate prin 11: dacă din suma tuturor cifrelor aşezate în locuri impare; scădem suma tuturor cifrelor ce ocupă locuri pare, şi dacă diferenţa obţinută este egală cu 0 sau cu un număr (pozitiv sau negativ) multiplu de 11, – atunci şi numărul considerat este un multiplu de 11; în caz contrar, numărul nostru nu este divizibil prin 11.

Să luăm, de exemplu, numărul 87 635 064:

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25,$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14,$$
$$25 - 14 = 11.$$

Evident, numărul dat este divizibil prin 11.

Există şi un alt criteriu de divizibilitate prin 11, care este comod pentru numere nu prea mari. Împărţim numărul considerat de la dreapta spre stânga, în grupe de câte 2 cifre, şi le adunăm; dacă suma obţinută se împarte exact la 11, atunci şi numărul considerat este un multiplu al lui 11, şi invers. De exemplu, fie numărul 528. Să împărţim acest număr în grupe (5 | 28) şi să le adunăm:

5 + 28 = 33.

Deoarece 33 se împarte exact la. 11, numărul 528 este un multiplu al lui 11:

528: 11 = 48.

Să demonstrăm acest criteriu de divizibilitate. Împăr- j ţim numărul N (format din mai multe cifre) în grupe. Yom obţine numere formate dintr-o cifră sau din două *, pe care

* Dacă numărul N este format dintr-un număr impar de cifre, atunci i ultima grupă (extrema stingă) va fi formată dintr-o cifră. În afară de aceasta, o grupă de forma 03 va fi considerată, de asemenea, ca un număr | format dintr-o singură cifră 3, le vom nota (de la dreapta spre stânga) cu a, b, c etc., astfel încât numărul N va putea fi scris sub forma

N = a + 100 b + 10 000 c +... =

= a + 100(6 + 100c +...).

Scăzând din N numărul 99(& -f- 100c -f- ■ • •), care este un multiplu al lui 11, obţinem a + (i> + 100 c +...) = a + b + 100 (c +...), care, împărţit la 11, dă acelaşi rest ca N. Din acest număr scădem numărul 99(c +...), care este iarăşi un multiplu de 11 etc. Din rezultate deducem că, fiind împărţit la 11, numărul JV, dă acelaşi rest ca "numărul a + b + e +...

Numărul unui autocamion

Problemă

Făcând o plimbare prin oraş, trei studenţi de la Facultatea de matematică au observat că şoferul unui autocamion a încălcat regulile de circulaţie. Îtici unul dintre ei n-a memorat numărul maşinii (format din 4 cifre); fiind însă studenţi la matematici, fiecare dintre ei a observat câte o particularitate a acestui număr. Unul şi-a amintit că primele două cifre erau identice. Al doilea – că ultimele două cifre coincideau. În sfârşit, al treilea student afirma că numărul dat este un pătrat perfect. Oare se poate afla numărul maşinii după aceste indicii?

Llezolvare

Să notăm prima (şi a doua) cifră a numărului căutat cu a, iar cifra a treia (şi a patra) – cu b. Atunci întregul număr va fi

1 000a + 100a + 106 + b = 1 100a + 116 =* 11 (100a + b).

Acest număr este divizibil cu 11, şi de aceea (fiind un pătrat perfect) el se împarte exact şi cu Îl2. Deci, numărul 100a -|- b se împarte exact prin 11. Folosind oricare din cele două criterii de divizibilitate prin 11 arătate 1 mai sus, deducem că şi numărul a -f b este divizibil prin 11. Deci a + * = 11, deoarece atât a cât şi b sunt mai mici decât 10.

Ultima cifră b, a unui pătrat perfect, poate avea numai următoarele valori:

0, 1, 4, 5, 6, 9.

De aceea, pentru cifra a, care este egală cu 11 – b, putem avea următoarele valori:

11, io, 7, o, 5, 2.

Primele două posibilităţi se exclud, deci ne rămân următoarele patru:

6 = 4, a=7;

6=5, a = 6;

6=6, a= 5;

6=9, a = 2.

Rezultă că numărul autocamionului trebuie căutat printre următoarele patru numere:

7744, 6655, 5566, 2299.

Dar ultimele trei numere nu sunt pătrate perfecte: numărul 6655 se împarte la 5, dar nu se împarte la 25; numărul 5566 se împarte la 2, dar nu se împarte la 4; numărul 2299 = 121 • 19 nu este, nici el, un pătrat perfect. Rămâne deci numai numărul 7744 = 882 care dă soluţia problemei.

Divizibilitatea prin 19

Să se demonstreze următorul criteriu de divizibilitate prin 19:

Un număr se împarte exact la 19 numai dacă numărul zecilor adunat cu de două ori numărul unităţilor este un multiplu al lui 19.

Rezolvare

Orice număr JV poate fi reprezentat sub forma

N – lox + y, unde x este numărul zecilor (nu cifra din ordinul zecilor, ci numărul total al zecilor cuprinse în numărul dat), II – cifra unităţilor. Trebuie demonstrat că N este un multiplu al lui 19, numai dacă

N’ = x + 2y este un multiplu al lui 19. Pentru aceasta, înmulţim pe N’ cu 10, şi scădem pe N din produs; obţinem:

lOIV’-iV = 10 (x + 2; /) —(10 x + y) = 19y.

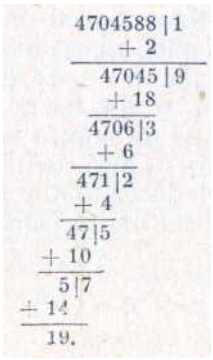
De aici rezultă că dacă N’ este un multiplu al lui 19, atunci şi

N – 10N’^19ij este divizibil cu 19; şi reciproc, dacă N se împarte exact la 19, şi

10N’ = N + 19 y este un multiplu al lui 19, şi, ca atare, devine evident că N’ este divizibil cu 19.

Să presupunem că se cere să determinăm dacă numărul 47 045 881 este un multiplu al lui 19.

Aplicăm iterat criteriul nostru de divizibilitate:



Deoarece 19 este divizibil cu 19, rezultă că şi numerele 57, 475, 4 712, 47 063, 470 459, 4 704 590 şi 47 045 881 sunt multipli ai lui 19.

Deci, numărul nostru se împarte exact la 19.

Teorema Sophiei Germain

Iată o problemă formulată de cunoscuta matematiciană franceză Sophie Germain:

Să se demonstreze că orice număr de forma a4 -f 4, unde a este diferit de 1, este un număr neprim.

Rezolvare

Demonstraţia reiese din următoarele transformări:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)\ (a^2 + 2 + 2a).$$

Numărul a4. + 4 poate fi deci pus sub forma unui produs de doi factori care nu sunt egali cu numărul dat şi nici cu 1 *, deci acest număr nu este prim.

Numere neprime

Există o infinitate de numere prime, adică de numere întregi mai mari decât unu, care nu se împart decât prin ele însele sau prin unu.

Începând cu numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31... şirul lor se extinde la infinit. Intercalate între numerele neprime, ele împart şirul numerelor naturale în grupe mai mult sau mai puţin mari de numere neprime consecutive. Cât de lungi pot fi aceste grupe? Oare pot să existe la rând, să zicem, o mie de numere neprime, fără ca ele să fie întrerupte de un număr prim?

Se poate demonstra – deşi acest lucru poate părea neverosimil – că grupele formate din numere compuse pot fi oricât de lungi. Nu există limită pentru lungimea acestor

* Aceasta din urmă deoarece a2 + 2 —2a = (a2-2a + 1) + 1 = (a-l)2 + 1 =£ 1, dacă a t.

Grupe: ele pot fi formate dintr-o mie, un milion, un trilion etc. De numere neprime consecutive.

Pentru comoditate, vom folosi simbolul convenţional n!, care reprezintă produsul tuturor numerelor de la 1 la n inclusiv. De exemplu 5! — 1 -2 -3 -4 -5. Vom demonstra acum că şirul

$$[(n+1)!+2],\ [(n+1)!+3],\ [(n+1)!+4],\ \text{pînă la}\ [(n+1)!+n+1]\ \text{inclusiv}$$

este. Format din n numere neprime consecutive.

Aceste numere se succed în şirul numerelor naturale, deoarece fiecare din ele este mai mare decât precedentul cu o unitate. Eămâne de demonstrat că niciunul din aceste numere nu este prim.

Primul număr

(n + l)! + 2=1-2 – 3- 4- 5 – 6 ■ 7- … • (ti + 1) + 2

este par, deoarece ambii termeni ai sumei conţin factorul 2. Un număr par, mai mare decât 2, nu poate fi prim.

Al doilea număr

(71 + 1) l + 3 = 1 -2-3-4 • 5 • … • (77 + 1) + 3

reprezintă o sumă de doi termeni, fiecare din ei fiind un multiplu al lui 3. Deci, nici acest număr nu este prim.

Al treilea număr

(77 + 1)! + 4 = 1 -2 -3 -4 • 5 • … — (77 + 1) + 4

se împarte exact la 4, deoarece reprezintă o sumă de multipli ai lui 4.

În acelaşi mod, stabilim că numărul

(77 + 1)! + 5

este un multiplu al lui 5 etc. Cu alte cuvinte, orice număr din şirul nostru conţine un factor diferit de el însuşi şi diferit de 1; deci numărul dat nu este prim.

Dacă doriţi să scrieţi, de pildă, un şir de cinci numere neprime, este suficient ca în şirul de mai sus numărul n să fie înlocuit cu 5. Veţi obţine şirul

722, 723, 724, 725, 726.

Dar acesta nu este singurul şir format din cinci numere neprime. Există şi alte şiruri de acest fel, ca de pildă

62, 63, 64, 65, 66.

Sau numere şi mai mici:

24, 25, 26, 27, 28.

Să încercăm acum să rezolvăm problema următoare:’ Să se scrie un şir de zece numere neprime.

Rezolvare

Pe baza celor demonstrate mai sus stabilim că putem lua, drept prim număr dintre cele zece numere căutate, pe

1 • 2 • 3 • 4-... —10 • 11 + 2 = 39 816 802.

Şirul de numere căutat poate fi următorul:

39 816 802, 39 816 803, 39 816 804 etc.

Dar există şi şiruri formate din zece numere neprime care au valori mult mai mici. De exemplu, există un şir cuprins între o sută şi două sute, format nu din 10 ci din 13 numere neprime:

114, 115, 116, 117 ele. Până la 126 inclusiv.

Câte numere prime există

Existenţa unor şiruri oricât de lungi de numere ne- prime consecutive ne face să punem la îndoială faptul că şirul numerelor prime este infinit. De aceea, credem că este oportun să demonstrăm aci această afirmaţie.

Ea aparţine matematicianului grec antic Euclid şi este conţinută în celebra sa lucrare Elemente, numărându-se printre problemele rezolvate „prin reducere la absurd”. Să presupunem că şirul numerelor prime ar fi finit, şi să notăm ultimul număr prim din acest şir cu N. Formăm produsul

1 – 2 – 3 • 4 • 5 ’6 – 7 • ... ■ N = N \

şi adăugăm cifra 1. Obţinem:

NI +1.

Fiind un număr întreg, acesta trebuie să conţină măcar un factor prim, adică să fie divizibil măcar printr-un număr prim. Dar am presupus că toate numerele prime sunt mai mici sau egale cu N, iar numărul I! + 1 nu se împarte exact la niciun număr care este mai mic sau egal cu N; de fiecare dată va rămâne un rest egal cu 1.

Ca atare, nu se poate presupune că şirul numerelor prime este finit; această ipoteză duce la o contradicţie. Aşadar, dacă în şirul numerelor naturale am întâlni o serie oricât de lungă de numere neprime consecutive, putem fi siguri că după această serie există încă o infinitate de numere prime.

Cel mai mare număr prim cunoscut

Este un fapt acela de a fi convinşi că există numere prime oricât de mari şi este altceva de a şti care anume numere sunt prime. Cu cât un număr natural este mai mare, cu atât trebuie să efectuăm mai multe calcule pentru a verifica dacă acest număr este prim sau nu. Iată cel mai mare număr despre care se ştie în prezent că este prim:

22281 __ 1 #

El are circa 700 de cifre. Calculele, pe baza cărora s-a stabilit această afirmaţie, au fost efectuate cu ajutorul maşinilor de calculat moderne (vezi Cap. I, fi).

Un calcul important, în practică se pune problema multor calcule pur aritmetice a căror efectuare, fără ajutorul algebrei, este extrem de anevoioasă. Să presupunem că trebuie să aflăm rezultatul următoarelor operaţii:

2

— _

+ 90 000 000 000

(Acest calcul este necesar pentru a stabili dacă tehnica, 1 care se ocupă cu mişcarea corpurilor macroscopice, cu viteze mici în comparaţie cu viteza de propagare a undelor electromagnetice, este îndreptăţită să folosească vechea lege de compunere a vitezelor, fără să ţină seama de modificările survenite în mecanică datorite teoriei relativităţii. Potrivit mecanicii clasice, atunci când un corp ia parte concomitent la două mişcări rectilinii uniforme, dirijate la fel cu vitezele v1 şi v2 Jem/s, mişcarea rezultantă are viteza egală cu suma vitezelor mişcărilor componente v1 + ®2 Jem/s. Cât priveşte noua teorie, aceasta dă pentru viteza rezultantă a corpului expresia:

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \; km/s,$$

unde c este viteza de propagare a luminii în vid, egală cu aproximativ 300 000 Jem/s. În particular, viteza unui corp ’care ia parte concomitent la două mişcări rectilinii uniforme, dirijate la fel, având fiecare viteza de 1 Jem/s, va fi egală, conform mecanicii clasice, cu 2 Jern/s, iar potrivit noii teorii, cu

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} \; km/s.$$

Prin ce se deosebesc aceste două rezultate? Oare această, deosebire este perceptibilă pentru cele mai sensibile aparate 3 de măsură? Pentru clarificarea acestei importante pro- J bleme, trebuie să calculăm expresia de mai sus).

Vom proceda în două feluri: la început pe cale aritmetică obişnuită, iar apoi vom arăta cum se poate obţine = rezultatul dorit cu ajutorul algebrei. Este suficient să; aruncăm o privire asupra şirurilor lungi de cifre de mai jos 1 ca să ne convingem de superioritatea metodei algebrice.

În primul rând, să transformăm fracţia noastră „cu) mai multe etaje”:

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}$$

Acum sa trecem ia împărţire:

180 000 000 000 | 90 000 000 001
90 000 000 001 | 1,999 999 999 977 . . .

899 999 999 990
810 000 000 009

899 999 999 810
810 000 000 009

899 999 998 010
810 000 000 009

899 999 980 010
810 000 000 009

899 999 800 010
810 000 000 009

899 998 000 010
810 000 000 009

899 980 000 010
810 000 000 009

899 800 000 010
810 000 000 009

898 000 000 010
810 000 000 009

880 000 000 010
810 000 000 009

700 000 000 010
630 000 000 007

70 000 000 003

După cum vedeţi, calculul este meticulos şi obositor; se poate uşor să ne încurcăm şi să greşim. Iar pentru rezolvarea problemei este important să ştim precis, în ce loc anume se termină şirul cifrelor de 9 şi începe o serie de alte cifre.

Să comparăm acum cu modul rapid în care se poate rezolva aceeaşi problemă cu ajutorul algebrei. Vom folosi următoarea egalitate aproximativă: dacă a este un număr foarte mic, atunci:

$$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a$$

unde semnul înseamnă „aproximativ egal”.

Ne putem convinge de valabilitatea acestei afirmaţii foarte uşor: vom compara deîmpărţitul 1 cu produsul dintre împărţitor şi cât:

1 = (1 + a) (l-a), adică:

1 = l-a2.

Deoarece a este un număr foarte mic (de exemplu, 0,001), pătratul lui a2 va fi un număr şi mai mic (0,000001) şi poate fi neglijat.

Să aplicăm cele spuse

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{2}{1+\frac{1}{9\cdot 10^{10}}} \approx 2\,(1 - 0{,}111\ldots\cdot 10^{-10}) =$$
$$= 2 - 0{,}0000000000222\ldots = 1{,}999\,999\,999\,9777\ldots$$

calculului nostru *:

Am ajuns la acelaşi rezultat ca şi înainte, dar pe o cale mult mai rapidă.

Cititorul va fi, desigur, curios să afle ce importanţă prezintă rezultatul obţinut în problema de mecanică despre care a fost vorba mai sus. Acest rezultat arată că deoarece am considerat viteze mici în comparaţie cu viteza de propagare a luminii, abaterea de la vechea lege de compunere a vitezelor este neglijabilă din punct de vedere practic: | ea se manifestă la a unsprezecea cifră a numărului pe care l-am determinat, iar măsurătorile cele mai precise ale lungimii nu merg mai departe de cifra a 9-a; cât priveşte tehnica – calculele practice se limitează la 3—4 cifre.) De aceea, suntem îndreptăţiţi să afirmăm, fără nicio rezervă că, practic, mecanica nouă, a lui Einstein, nu aduce nicio schimbare în calculele tehnice privitoare la depla- | sarea corpurilor, care se mişcă „încet” (în comparaţie cu viteza de propagare a luminii).

* Mai departe vom folosi egalitatea aproximativă

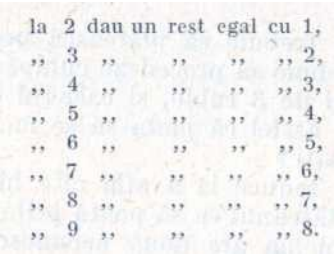
— A (1 – a).

1 + a

Atunci când este mai simplu fără algebră

Pe lângă cazurile în care algebra acordă un ajutor preţios aritmeticii, există şi altele, când intervenţia algebrei duce la complicaţii inutile. Adevărata cunoaştere a matematicii constă în iscusinţa de a dispune de metodele matematice, astfel incit să fie aleasă calea cea mai directă şi mai sigură, pentru fiecare caz în parte fără a se ţine seama dacă metoda de rezolvare a problemei aparţine de domeniul aritmeticii, algebrei, geometriei etc. De aceea, credem că este util să analizăm un caz care, rezolvat prin metode algebrice, duce la complicaţii inutile.

Să se afle cel mai mic dintre numerele care împărţite


la 2 dau un rest egal cu 1,
„ 3 „ „ „ „ 2,
„ 4 „ „ „ „ 3,
„ 5 „ „ „ „ 4,
„ 6 „ „ „ „ 5,
„ 7 „ „ „ „ 6,
„ 8 „ „ „ „ 7,
„ 9 „ „ „ „ 8.

Bezolvare

Această problemă mi-a fost propusă cu următoarele cuvinte: „Cum aţi rezolva dv. Această problemă? Sunt prea multe ecuaţii şi este foarte greu să te descurci în ele”.

Lucrurile se explică simplu; pentru rezolvarea problemei nu este nevoie de niciun fel de ecuaţii, de niciun fel de algebră – ea poate fi rezolvată printr-un raţionament aritmetic foarte simplu.

Să adăugăm la numărul căutat o unitate. Restul va fi: 1 + 1 = 2; deci numărul nostru se va împărţi exact la 2.

La fel, el se va împărţi exact şi la 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cel mai mic dintre aceste numere va fi 9 • 8 -7 • 5 = 2 520, şi deci numărul căutat va fi egal cu 2 519, ceea ce se poate verifica uşor.

Capitolul i v ECUAŢII DIOFANTICE

Cumpărarea unei cravate

1’roliU’ină

Un cetăţean trebuie să plătească pentru o cravată ’ 19 ruble. Cum trebuie să procedeze cumpărătorul care are la el numai hârtii de 3 ruble, şi casierul care are numai hârtii de 5 ruble, astfel ca plata să se facă fără ca banii lor să fie schimbaţi?

Problema se reduce la a afla câte hârtii de 3 ruble trebuie să dea cetăţeanul ca să poată primi restul în hârtii de 5 ruble. Problema are două necunoscute – numărul hârtiilor de 3 ruble (x) şi numărul hârtiilor de 5 ruble: (.; /) – legate printr-o singură ecuaţie:

3a; – 5 y = 19.

Deşi o ecuaţie cu două necunoscute are o infinitate de soluţii, nu rezultă de loc că printre ele se va găsi măcar o soluţie în care x şi y să fie întregi şi pozitivi, (fiind vorba. De numărul unor bilete de bancă). Iată de ce algebra a elaborat metoda de rezolvare a unor astfel de ecuaţii „nedeterminate”. Meritul introducerii lor în algebră aparţine primului reprezentant european din antichitate al acestei ştiinţe, Diofant, din care cauză ecuaţiile de acest gen sunt adesea numite „ecuaţii diofantice”.

Ilezolvare

Yom arăta, pe exemplul dat, modul în care se rezolvă J ecuaţiile de acest gen.

Trebuie aflate > alorile lui x şi y din ecuaţia 3x – 5 y = 19, ştiind că x şi y sunt numere întregi şi pozitive.

Să izolăm necunoscuta cu coeficientul mai mic, adică termenul 3x; obţinem:

3x = 19 -f- 5 y, de unde

$$x = \frac{19 + 5y}{3} = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}.$$

Deoarece x, 0 şi y sunt numere întregi, egalitatea poate avea loc numai dacă 1-~2y este, de asemenea, un număr întreg. Să notăm această fracţie cu litera t. Atunci

— 6 + y + t, unde şi deci

3/= 1 + 2g, 2y = 31-1.

Din această ultimă ecuaţie îl determinăm pe y:

$$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}.$$

Deoarece y şi t sunt numere întregi, rezultă că şi 1 ~~ – trebuie să fie un număr întreg (pe care îl vom nota cu ty). Prin urmare y = t +

în care de unde

21, = 1-1 şi i = 21, + 1.

Înlocuind valoarea t – 2tx + 1 în ecuaţiile precedente obţinem:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1,$$
$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1.$$

Astfel, pentru x şi y rezultă expresiile*

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 1 + 3t_1.$$

Ştim că x şi y sunt numere întregi şi pozitive, adică mai mari decât zero. Prin urmare,

$$8 + 5t_1 > 0,$$
$$1 + 3t_1 > 0.$$

Din aceste inegalităţi rezultă:

511> —8 şi f, > – –,

5

3/i > —1 şi tx> – .

a

Inegalităţile de mai sus limitează valorile lui; ea este mai mare decât – | şi ca atare mai mare decât – y j •

Dar cum t1 este un număr întreg, deducem că pentru el sunt posibile numai următoarele valori:

b = 0, 1,2,3, 4...

Valorile corespunzătoare pentru x şi y vor fi:

$$x = 8 + 5t_1 = 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ldots,$$
$$y = 1 + 3t_1 = 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ldots$$

Am stabilit astfel modul în care poate fi făcută plata: cetăţeanul va da casierului 8 Mrtii de 3 ruble şi va primi de la acesta din urmă o hârtie de 5 ruble:

8 ■ 3-5 = 19,

* De fapt, am demonstrat doar că orice soluţie cu numere întregi a ecuaţiei 3x—5y — 19 este de forma x^ 8 + 5tv y = 1 + 3/ „unde t, este un număr întreg oarecare. Demonstraţia afirmaţiei reciproce (anume că pentru oricare valoare întreagă a lui t1 obţinem o soluţie cu numere întregi a ecuaţiei date) nu am făcut-o. Dar de acest

fapt ne putem convinge uşor, raţionând în ordine inversă sau înlocuind valorile aflate ale lui x şi y în ecuaţia iniţială.

Sau va plăti 13 hârtii de 3 ruble şi va primi un rest de 4 hârtii de 5 ruble:

13 • 3-4 • 5 = 19

ş.a.m.d.

Teoretic, problema are o infinitate de soluţii, însă practic numărul acestora este limitat, deoarece atât cumpărătorul cât şi casierul hu au o infinitate de bilete de bancă. Dacă fiecare dintre ei are, să spunem, câte 10 bilete, plata poate fi făcută numai într-un singur fel: se plăteşte cu 8 hârtii de 3 ruble şi se primeşte rest o hârtie de 5 ruble. După cum vedeţi, ecuaţiile nedeterminate pot da în practică soluţii bine determinate.

Revenind la problema noastră, propunem cititorului să rezolve el însuşi o variantă a problemei de mai sus, şi anume să analizeze cazul în care cumpărătorul are numai hârtii de 5 ruble, iar casierul numai hârtii de 3 ruble, în acest caz, se obţin următoarele soluţii:

x == 5, 8, 11j• • • j y = 2, 7, 12...

Într-adevăr,

5 • 5- 2 • 3 = 19,

8 • 5- 7 ■ 3 = 19,

11 ■ 5-12 • 3 = 19,

Am fi putut obţine aceste rezultate şi din soluţia problemei iniţiale, folosind un procedeu algebric simplu. Deoarece a’da hârtii de 5 ruble şi a primi hârtii de 3 ruble este echivalent cu „a primi hârtii de 5 ruble negative”, şi „a da hârtii de 3 ruble negative”, noua variantă a problemei se rezolvă cu ajutorul aceleiaşi ecuaţii, care reiese din problema iniţială:

3x —5 y – 19, dar cu condiţia ca x şi y să fie numere negative. De aceea, din egalităţile:

x – 8 + 5/j, y = i + 3/x ţinând seama de x< O şi y< O, deducem: şi, prin urmare,

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

Luând t1 = – 2, —3, —4 etc., obţinem din formulele precedente următoarele valori pentru a; şi y:

$t_1 = -2$	-3	-4
$x = -2$	-7	-12
$y = -5$	-8	-11

Prima pereche de soluţii, x = —2, y – —o, arată că cumpărătorul „plăteşte minus 2 hârtii de 3 ruble” şi „primeşte minus 5 hârtii de 5 ruble”, adică, în vorbirea obişnuită, plăteşte 5 hârtii de 5 ruble şi primeşte 2 hârtii de 3 ruble.

Controlul unei cooperative

Problemă

La controlul registrelor de comerţ ale unei coopera-’ tive, una din înscrieri a fost pătată cu cerneală şi avea aspectul de mai jos:

Nu s-a putut distinge câţi metri au fost vânduţi, însă era sigur că acest număr nu era fracţionar. La suma realizată s-au putut distinge doar ultimele trei cifre, stabilindu-se că înaintea lor au fost încă trei cifre.

Poate, oare, comisia de control să stabilească din aceste date înscrierea?

Itezolvare

Notăm numărul de metri prin x. Suma realizată va fi dată în copeici prin:

4936 x.

Numărul exprimat prin cele trei cifre pătate cu cerneală va fi notat prin y. Este evident că acesta reprezintă mii de copeici, iar suma întreagă în copeici va fi:

loooy + 728.

Avem ecuaţia

4936 x = 1000 y + 728, sau, după simplificarea cu 8,

617 z-125 y = 91.

În această ecuaţie x şi y sunt numere întregi, iar y nu poate fi mai mare ca 999, deoarece el nu poate fi format decât din 3 cifre. Rezolvăm ecuaţia, aşa cum am arătat mai sus:

$$125\,y = 617\,x - 91,$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2\,(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

(Aci am luat ~ = 5 – deoarece ne interesează ca resturile să fie cât mai mici. Raportul

2 (17 —4a;)

125

este un număr întreg, şi deoarece 2 nu se împarte la 125, rezultă că 17~5- este un număr întreg pe care l-am şi notat cu t).

Mai departe din ecuaţia rezultă: $\frac{17-4x}{125} = t,$

$$17-4x = 125\ t,$$
$$x = 4-31\ t + \frac{1-t}{4} = 4-31t + t_1,$$

unde

$$t_1 = \frac{1-t,}{4},$$

şi, prin urmare, $4t_1 = 1-t;\ t = 1-4t_1;$
$x = 125\,t_1-27,\ y = 617\,t_1-134$ *.

Ştim că

100 <i/< 1 000.

Deducem:

100 < 017 lj —134 < 1 000, de unde:

$$t_1 \geqslant \frac{234}{617} \text{şi } t_1 < \frac{1\,134}{617}.$$

Este evident că pentru există o singură valoare întreagă:

şi deci x = 98, y = 483, adică au fost vânduţi 98 metri în valoare de 4 837 ruble, 28 de copeici.

Cumpărarea unor timbre poştale

Problemă

Cineva are 5 ruble şi doreşte să cumpere 20 de timbre poştale a 40 de copeici, a 25 de copeici şi a 5 copeici. Câte timbre se pot cumpăra de fiecare fel?

* Observaţi că coeficienţii lui t1 sunt egali cu coeficienţii lui x şi y din ecuaţia iniţială 617—125y = 91 şi unul din coeficienţi are seninul schimbat. Acest lucru nu este întâmplător; se poate demonstra că aşa este ori de câte ori coeficienţii lui * şi y sunt numere prime între ele.

Ttezolvare în cazul de faţă, avem două ecuaţii cu trei necunoscute:

40a: -f 25 y + 5 z = 500, x + y + z = 20, unde x este numărul de timbre de 40 de copeici, y – de 25 de copeici, z – de 5 copeici. Împărţind prima ecuaţie la 5 şi scăzând din ea a doua ecuaţie, vom obţine o ecuaţie cu 2 necunoscute:

7x + Ay = 80.

Obţinem pentru y: $y = 20 - 7 \cdot \frac{x}{4} \cdot$

Evident, ~ este un număr întreg. Îl vom nota cu t. Avem: y = 20 -7f, a: = 41.

Înlocuim valorile obţinute pentru x şi y în a doua ecuaţie:

Al + 20 —7f + Z = 20; obţinem:

’ z = 31.

Deoarece x > 0, y >0 şi z >0, nu este greu să stabilim marginile între care poate varia t:

6

o < / < 2 —»

7

de unde deducem că pentru t sunt posibile numai două valori întregi:

t = 1 ji t = 2.

Valorile corespunzătoare pentru x, y, z vor fi:

$t =$	1	2
$x =$	4	8
$y =$	13	6
$z =$	3	6

Verificare

$4 \cdot 40 + 13 \cdot 25 + 3 \cdot 5 = 500,$
$8 \cdot 40 + 6 \cdot 25 + 6 \cdot 5 = 500.$

Deci timbrele pot fi cumpărate numai în două feluri. Problema următoare este de acelaşi gen.

Cumpărarea unor fructe

Problemă

Cu 50 de ruble au fost cumpărate 100 de bucăţi de diferite fructe. Preţurile fructelor sunt următoarele:

pepene verde 5 ruble bucata mere. 1 rublă bucata prune 10 copeici bucata

Câte bucăţi din fiecare fel de fructe au fost cumpărate?

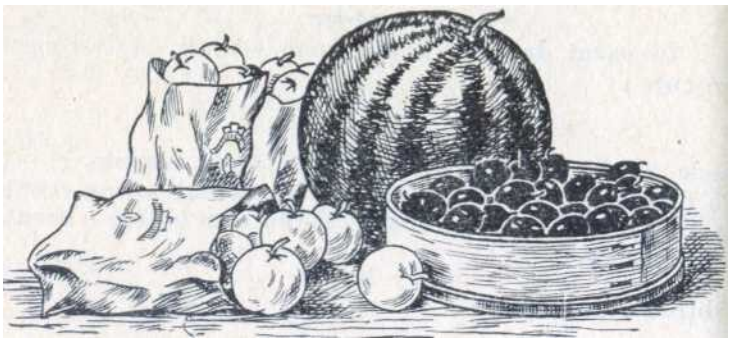
Rezolvare

No tind numărul pepenilor cu x, al merelor cu y şi al prunelor cu z, formăm două ecuaţii:

$$\begin{cases} 500x + 100y + 10z = 5\,000, \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

împărţind prima ecuaţie la 10 şi scăzând din ea ecuaţia a doua, obţinem o ecuaţie cu două necunoscute:

49-r + 9i/ = 400.



lai departe se procedează astfel:

$$y = \frac{400-49x}{9} = 44 + 5x + \frac{4(1-x)}{9} = 44-5x + 4t,$$

$$t = \frac{1-x}{9}, \quad x = 1-9t,$$

$$y = 44-5\ (1-9t) + 4t = 39 + 49t.$$

Din inegalităţile: deducem că $1-9t > 0$ şi $39 + 49t > 0,$

$$\frac{1}{9} > t > -\frac{39}{49},$$

şi deci t = 0. De aceea, x – 1, y = 39.

Înlocuind aceste valori ale lui x şi y în ecuaţia a doua, obţinem: s = 60.

Deci, s-au cumpărat: 1 pepene, 39 de mere şi 60 de prune.

Alte combinaţii nu există.

Să sp afle ziua naşterii

Problema

Îndemânarea de a rezolva ecuaţii nedeterminate permite efectuarea următoarei scamatorii matematice.

Propuneţi unui prieten să înmulţească ziua naşterii sale cu 12, iar luna – cu 31. El vă comunică suma celor două produse şi pe baza lor îi calculaţi data naşterii.

Astfel, dacă prietenul s-a născut la 9 februarie, el va face următoarele calcule:

$$9 \cdot 12 = 108,\ 2 \cdot 31 = 62,$$
$$108 + 62 = 170.$$

Pe baza acestui din urmă rezultat, 170, se poate determina data naşterii. Cum?

Llezolvare

Problema se reduce la rezolvarea ecuaţiei nedeterminate

12a + 31» = 170

în numere întregi şi pozitive, în care data (ziua) x nu este mai mare decât 31, iar numărul lunii y nu este mai mare decât 12.

$$x = \frac{170-31y}{12} = 14-3y + \frac{2+5y}{12} = 14-3y+t,$$
$$2 + 5y = 12t,$$
$$y = \frac{-2+12t}{5} = 2t-2 \cdot \frac{1-t}{5} = 2t-2t_1,$$
$$1-t = 5t_1,\ t = 1-5t_1,$$
$$y = 2\,(1-5t_1)-2t_1 = 2-12t_1,$$
$$x = 14-3\ (2-12\,t_1) + 1-5t_1 = 9 + 31\ t_1.$$

Ştiind că 31 >- x > 0 şi 12 > y > 0, aflăm marginile între care poate varia tx:

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{6}{1}.$$

Prin urmare

= 0, x = 9, y = 2.

Data naşterii: luna a doua, ziua a 9-a, adică 9 februarie.

Să demonstrăm că scamatoria reuşeşte întotdeauna, adică ecuaţia are întotdeauna o singură soluţie cu numere întregi şi pozitive. Dacă notăm numărul comunicat de prieten prin a, aflarea datei naşterii lui se reduce la rezolvarea ecuaţiei:

12. T + 31y = a.

Să raţionăm „prin reducere la absurd”. Presupunem că această ecuaţie are două soluţii diferite în numere întregi şi pozitive, şi anume soluţia xv şi soluţia xt, y2, unde a?! şi x2 nu-l depăşesc pe 31, iar yx şi y2 nu-l depăşesc pe 12.

Aveni:

$$\text{«}\ \begin{matrix} 12x_1 + 31y_1 = a \\ 12x_2 + 31y_2 = a \end{matrix}$$

Scăzând ecuaţia a doua din prima, obţinem:

$$12\,(x_1-x_2) + 31\,(y_1-y_2) = 0.$$

Din această egalitate reiese că numărul 12 – x2) se împarte la 31. Deoarece şi x2 sunt numere pozitive mai mici sau egale cu 31, diferenţa lor {xx – x2) este mai mică decât 31. De aceea, numărul 12(®1 – x2) poate să fie divizibil prin 31 numai în cazul când – x2, adică atunci când prima soluţie coincide cu a doua. În felul acesta, presupunerea existenţei a două soluţii diferite duce la o contradicţie.

Vânzarea unor pui de (jăină

O veche problemă

Trei surori au venit la târg cu nişte pui de găină. Una dintre ele a adus pentru vânzare 10 pui, a doua – 16, a treia – 26. Până la prânz ele şi-au vândut o parte din pui încasând acelaşi preţ de bucată. După amiază ele au scăzut preţul şi au vândut restul de pui la acelaşi preţ. Acasă, toate trei s-au întors cri aceeaşi sumă de bani: fiecare dintre surori a realizat din vânzare câte 35 de ruble.

La ce preţ au vândut ele puii de găină înainte şi după-amiază?

Rezolvare

Să notăm numărul de pui vânduţi până la prânz de fiecare dintre surori cu x, y, z. În a doua jumătate a zilei ele au vândut 10 – x, 16 – y, 26 – z pui. Preţul până la prânz îl vom nota cu m, iar cel de după-amiază – cu n. Pentru a fi mai clar, strângem la un loc aceste notaţii:

	Numărul de pui vînduţi			Preţul
Pînă la prînz	x	y	z	m
După prînz	$10-x$	$16-y$	$26-z$	n

Prima a realizat:

mi + n (10-z); prin urmare, mx + ^ (10-*) = 35; a doua:

my + n (10 – y); prin urmare, my + n (16 – y) = 35; a treia:

mz + n (20-z); prin urmare, mz + n (20-z) = 35.

Să transformăm aceste trei ecuaţii:

$$\begin{cases} (m-n)\,x + 10\,n = 35, \\ (m-n)\,y + 16\,n = 35, \\ (m-n)\,z + 26\,n = 35. \end{cases}$$

Scăzând din ecuaţia a treia prima şi apoi a doua ecuaţie, obţinem succesiv:

$$\begin{cases} (m-n)\,(z-x) + 16n = 0, \\ (m-n)\,(z-y) + 10\,n = 0, \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} (m-n)\,(x-z) = 16\,n, \\ (m-n)\,(y-z) = 10\,n. \end{cases}$$

Să împărţim prima din aceste ecuaţii la a doua:

$$\frac{x-z}{y-z}=\frac{8}{5},\ \text{sau}\ \frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}.$$

Deoarece x, y, z sunt numere întregi, diferenţele x – z, y – z vor fi de asemenea numere întregi. De aceea, pentru obţinerea egalităţii:

$$\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5},$$

este necesar ca x – z să fie divizibil prin 8, iar y – z, prin 5. Prin urmare, *

$$\frac{x-z}{8}=t=\frac{y-z}{5},$$

de unde: $\begin{aligned} x &= z+8t, \\ y &= z+5t. \end{aligned}$

Observăm că numărul t este un număr întreg şi pozitiv, deoarece x > z (în^ cazul contrar prima dintre surori n-ar fi putut realiza acelaşi câştig ca cea de-a treia).

Deoarece x < 10, reiese că z + 8/ < 10.

Pentru z şi t întregi şi pozitivi această din urmă inegalitate va fi satisfăcută numai un cazul când z = 1 şi t = 1. Înlocuind aceste valori în ecuaţiile:

x = z + 8t şi y = z 51, obţinem:

x = 9, y = 6.

Revenind la ecuaţiile:

mx + n (10 – x) = 35, my + n (16 —y) = 35, mz + n (26 – z) = 35

şi introducând în aceasta valorile obţinute pentru x, y şi z, obţinem preţurile cu care au fost vânduţi puii de găină:

3 i m – 3 – rb, n – 1 – rb.

4 4

Deci, până la prânz puii s-au vândut cu 3,75 de ruble, iar după prânz – cu 1,25 de ruble.

Două numere şi patru operaţii

Problemă

Problema precedentă, cn trei ecuaţii şi cinci necunoscute, nu am rezolvat-o prin metoda generală, ci cu ajutorul unui raţionament matematic liber. La fel vom rezolva şi problemele următoare, care duc la ecuaţii nedeterminate de gradul doi.

Iată prima dintre ele.

Cu două numere întregi şi pozitive au fost efectuate următoarele patru operaţii:

1. Adunarea;

2. Scăderea numărului mai mic din numărul mai mare;

3. Înmulţirea;

4. Împărţirea numărului mai mare la numărul mai mic.

Rezultatele obţinute fiind adunate au dat numărul 243. Să se afle numerele date.,

Rezolvare

Dacă vom nota numărul mai mare eu x şi numărul mai mic cu y, atunci:

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Dacă înmulţim această ecuaţie cu y, desfacem parantezele şi apoi reducem termenii asemenea, obţinem:

i (2 y +?; 2 + 1) = 243y.

Dar

$$2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2, \text{ şi de aceea:}$$

$$x = \frac{243\ y}{(y + 1)^2}.$$

Pentru ca x să fie un număr întreg, numitorul (y -f l)2 trebuie să fie unul din divizorii numărului 243 (deoarece y nu poate să aibă factori comuni cu y +1). Dacă 243 = = 35, reiese că 243 se divide la următoarele numere, care sunt pătrate perfecte: 1, 32, 92. Deci, (y -fi)2 trebuie să fie egal cu 1,32 sau 92, de unde rezultă (având în vedere că y trebuie să fie un număr pozitiv) că y este egal cu 8 sau cu 2.

Atunci x va fi egal cu:

$$\frac{243 \cdot 8}{81} \text{ sau } \frac{243 \cdot 2}{9}.$$

Deci numerele căutate vor fi 24 şi 8 sau 54 şi 2.

Ce fel (le dreptunghi?

Problemă

Laturile unui dreptunghi sunt exprimate prin numere întregi. Ce lungime trebuie să aibă aceste laturi, ca perimetrul dreptunghiului să fie egal cu suprafaţa lui %

nezoivare

Notând laturile dreptunghiului cir x şi y, formăm ecuaţia: $2x + 2y = xy,$

de unde:

$$x = \frac{2y}{y-2}.$$

Deoarece x şi y sunt pozitivi, numărul y – 2 trebuie să fie pozitiv, adică y trebuie să fie mai mare decât 2. Observăm că:

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2},$$

4

şi cum x trebuie să fie un număr întreg, expresia – trebuie să fie de asemenea un număr întreg. Dar în cazul y >2 acest lucru este posibil numai dacă y este egal cu 3, 4 sau 6. Valorile corespunzătoare ale lui x vor fi: 6, 4, 3.

Aşadar, figura căutată este fie un dreptunghi cu laturile 3 şi 6, fie un pătrat cu latura 4.

Două numere formate din două cifre Problemă

Numerele 46 şi 96 posedă o particularitate interesantă: produsul lor rămâne acelaşi, atunci când permutăm cifrele lor.

Într-adevăr,

46 • 96 = 4416 = 64 • 69.

Se cere să se stabilească dacă există şi alte perechi de numere formate din două cifre, care posedă aceeaşi proprietate.

Rozolvare

Să notăm cifrele numerelor căutate cu x şi y, z şi t şi să formăm ecuaţia:

(10* + V) (10z + t) = (10i/ + *) (10 / + z).

Desfăcând parantezele şi făcând reducerile obţinem:

xz = yt, unde x, y, z, t sunt numere întregi, mai mici decât 10. Pentru aflarea soluţiilor, formăm din 9 cifre toate perechile cu produsele egale:

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 & 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \\ 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 & 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \\ 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 & 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 \\ 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 & 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 \\ 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 & \end{array}$$

în total avem 9 egalităţi. Din fiecare se pot forma una sau două grupe de numere căutate. De pildă, din egalitatea 1 -4=2 -2 avem o singură soluţie:

12 • 42 = 21 -24.

Din egalitatea 1 -6=2 -3 avem două soluţii:

12 • 63 = 21 • 36; 13 • 62 = 31 • 26.

În felul acesta aflăm următoarele 14 soluţii: Numerele pitagorice

O metodă comodă şi foarte precisă, folosită pentru trasarea liniilor perpendiculare pe teren, constă în urmă- j toarele. Să presupunem că în punctul A trebuie să ridicăm; o perpendiculară pe MN (fig. 13). Din punctul A, pe] direcţia lui AM, se ia de trei ori o distanţă oarecare a. J Apoi, pe o sfoară se leagă trei noduri având între ele distanţele egale cu 4a şi 5a. Fixând nodurile extreme în punctele A şi B, se întinde sfoara din nodul din mijloc G. Sfoara va forma un triunghi, în care unghiul A va fi drept.

Această metodă veche, folosită cu mii de ani în urmă de constructorii piramidelor egiptene, se bazează pe faptul că orice triunghi ale cărui laturi se prezintă în raportul 3:4:5 este, potrivit cunoscutei teoreme a lui Pitagora, un triunghi dreptunghi, deoarece:

32 + 42 = 52.

Afară de numerele 3, 4, 5, există o infinitate de numere întregi şi pozitive a, b, c, care satisfac relaţia a2 + Z>2 = c2.

Aceste numere se numesc pitagorice. După teorema lui Pitagora, ele pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghi; de aceea a şi b se numesc „catete”, iar c „ipotenuză”.

Este clar că atunci când a, b şi c sunt numere pitagorice, atunci şi pa, pb şi pe (unde p este un număr întreg) vor fi numere pitagorice. Când numerele pitagorice au factor comun, numerele date pot fi simplificate prin acest factor comun şi vom obţine din nou trei numere pitagorice. De aceea, vom analiza la început numai numerele pitagorice prime între ele (celelalte le vom obţine înmulţindu-le cu diferite numere întregi pozitive).

Să demonstrăm că în fiecare triplet a, b, c una din catete trebuie să fie un număr par, iar cealaltă – un număr impar. Vom raţiona prin „reducere la absurd”. Dacă ambele „catete” a şi b sunt pare, atunci şi numărul a2 + b2 va fi par, şi deci şi „ipotenuza”. Aceasta este însă în contradicţie cu faptul că numerele a, b, c nu au factor comun, trei numere pare având factorul comun 2. În felul acesta, una din „catetele” a, b trebuie să fie un număr impar.

Mai există o posibilitate: ambele „catete” sunt numere impare, iar „ipotenuza” – un număr par. Îfu este greu să demonstrăm că această situaţie nu poate avea loc. Într-adevăr, dacă „catetele” vor fi de forma:

2x + 1 şi 2y + 1,

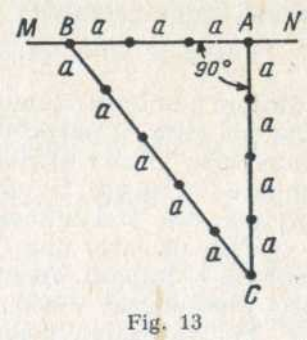


Fig. 13

atunci suma pătratelor lor va fi egală cu:

4a; 2 + 4x + 1 + iif + 4y + 1 = 4 (a; 2 + x + y- + y) + 2, adică un număr care, împărţit la 4, va da un rest egal cu 2. Dar noi ştim că pătratul oricărui număr par trebuie să se împartă la 4 fără rest. Deci, suma pătratelor a două numere impare nu poate fi pătratul unui număr par; cu alte cuvinte, cele trei numere nu sunt pitagorice.

Prin urmare, una din „catetele” a, b este pară, iar cealaltă – impară. Atunci numărul a2 + &2 este impar şi deci „ipotenuza” c este impară.

Pentru fixarea ideilor, presupunem „cateta” a impară, iar „cateta” b – pară. Din egalitatea:

a2 4- b2 = c2, obţinem uşor:

a2 = c2 – b2 – (c + b) (c-b).

Factorii c + b şi c —b, din membrul al doilea al egalităţii, sunt numere prime între ele. Într-adevăr, dacă aceste numere ar avea un factor comun prim, diferit de unitate, atunci şi suma:

(c + b) + (c – b) = 2c, şi diferenţa:

(c + b) (c b) = 2b, şi produsul:

(c + b) (c – b) ■ a2

s-ar divide prin el, adică numerele 2c, 2b şi a ar avea un factor comun. Deoarece a este impar, acest factor este diferit de 2. Acelaşi factor comun l-ar avea şi numerele a, b, c, ceea ce nu se poate. Contradicţia obţinută arată că numerele c + b şi c – b sunt prime între ele.

Însă când produsul a două numere prime între ele este un pătrat perfect, atunci fiecare din ele este un pătrat perfect, adică: $\begin{cases} c+b=m^2, \\ c-b=n^2, \end{cases}$

Rezolvând acest sistem, obţinem:

$$c=\frac{m^2+n^2}{2}, \qquad b=\frac{m^2-n^2}{2},$$

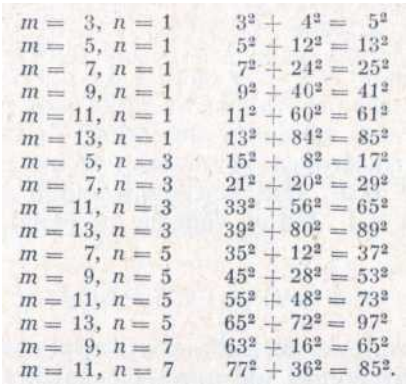
a2 – (c -f b) (c – b) = m2 n2, a = mn.

Aşadar, numerele pitagorice considerate sunt de forma:

$$a = mn, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

unde m şi n sunt numere impare prime între ele. Cititorul se poate convinge uşor că şi pentru orice valori impare ale lui m şi n, formulele de mai sus dau trei numere pitagorice a, b, c.

Iată câteva triplete de numere pitagorice, obţinute pentru diferite valori atribuite lui m şi n:



$$\begin{array}{ll}
m = 3, & n = 1 \quad 3^2 + 4^2 = 5^2 \\
m = 5, & n = 1 \quad 5^2 + 12^2 = 13^2 \\
m = 7, & n = 1 \quad 7^2 + 24^2 = 25^2 \\
m = 9, & n = 1 \quad 9^2 + 40^2 = 41^2 \\
m = 11, & n = 1 \quad 11^2 + 60^2 = 61^2 \\
m = 13, & n = 1 \quad 13^2 + 84^2 = 85^2 \\
m = 5, & n = 3 \quad 15^2 + 8^2 = 17^2 \\
m = 7, & n = 3 \quad 21^2 + 20^2 = 29^2 \\
m = 11, & n = 3 \quad 33^2 + 56^2 = 65^2 \\
m = 13, & n = 3 \quad 39^2 + 80^2 = 89^2 \\
m = 7, & n = 5 \quad 35^2 + 12^2 = 37^2 \\
m = 9, & n = 5 \quad 45^2 + 28^2 = 53^2 \\
m = 11, & n = 5 \quad 55^2 + 48^2 = 73^2 \\
m = 13, & n = 5 \quad 65^2 + 72^2 = 97^2 \\
m = 9, & n = 7 \quad 63^2 + 16^2 = 65^2 \\
m = 11, & n = 7 \quad 77^2 + 36^2 = 85^2.
\end{array}$$

(Toate celelalte triplete de numere pitagorice, fie că au factori comuni, fie că sunt compuse din numere mai mari decât 100).

Numerele pitagorice posedă câteva particularităţi interesante, pe care le vom indica, fără demonstraţie:

1. Una din „catete” trebuie să fie multiplu de 3.

2. Una din „catete” trebuie să fie multiplu de 4.

3. Unul din numerele pitagorice trebuie să fie multiplu de 5.

Cititorul poate să se convingă de existenţa acestor proprietăţi analizând exemplele de mai sus.

Ecuaţia nedeterminată de ţjradni trei

Huma cuburilor a trei numere întregi şi pozitive poate fi cubul unui al patrulea număr. De exemplu:

33 + 4.3 + 53 = 63.

Aceasta înseamnă că un cub cu muchia egală cu 6 cm este la fel de mare cu suma a trei cuburi, ale căror

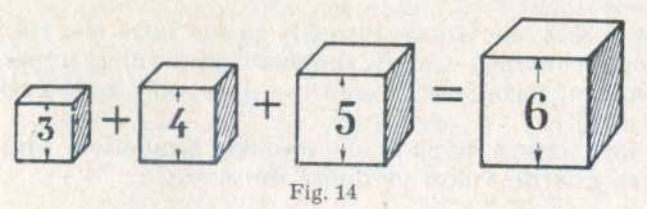


Fig. 14

muchii sunt egale respectiv cu 3, 4 şi 5 cm (fig. 14). Potrivit legendei, această proprietate l-a preocupat mult pe Platon.

Să încercăm să găsim alte relaţii de acest gen, adică să punem următoarea problemă: să se rezolve ecuaţia ■ x3 + y3 + z3 = u3. Este însă mai comod să notăm necunoscuta u cu —t. Atunci ecuaţia va căpăta o formă mai simplă x3 + y3 + i3 + t3 = o.

Vom examina o metodă cu ajutorul căreia putem afla o infinitate de soluţii ale acestei ecuaţii, exprimate prin numere întregi (pozitive şi negative). Fie a, b, c, d şi oc,

(3, y, S, două grapuri de câte 4 numere, care satisfac ecuaţia ’ de mai sus. Să adăugăm la numerele din primul grup numerele din grupul al doilea înmulţite cu un număr k şi să căutăm să-l alegem pe Ic, astfel încât numerele obţinute:

a + ka., b + fep, c -f ky, d + kS, să satisfacă, de asemenea, ecuaţia noastră. Cu alte cuvinte,] să-l alegem pe Te astfel ca să rezulte egalitatea:

(a + kx) s + (b + *3)3 + (c + ky)3 + (d + fe8)3 = 0.

Desfăcând parantezele şi având în vedere că grupurile a, b, c, d şi a, [3, y, 8 satisfac ecuaţia noastră, adică an loc egalităţile: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0,\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$

obţinem: $3a^2k\alpha + 3ak^2\alpha^2 + 3b^2k\beta + 3bk^2\beta^2 + 3c^2k\gamma + 3ck^2\gamma^2 + 3d^2k\delta + + 3dk^2\delta^2 = 0,$

sau

3k [(«2a + 62[3 + c2y + d28) + k {aofi + + cy2 + d§2) 0.

Acest produs va fi egal cu zero numai în cazul când măcar unul din factorii lui este egal cu zero. Egalând fiecare din factori cu zero, obţinem două valori pentru k. Prima valoare, k = 0, nu ne interesează, deoarece aceasta înseamnă că dacă la numerele a, b, c, d nu se adaugă nimic, atunci numerele obţinute satisfac ecuaţia noastră. De aceea vom lua numai valoarea a doua pentru k:

$$k = \frac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta}{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2}.$$

Astfel, cunoscând două grupuri de 1 numere, care satisfac ecuaţia iniţială, putem afla un al treilea grup de 4 numere de acest fel; pentru aceasta trebuie să adunăm la numerele din primul grup de 4 numere, numerele din grupul al doilea înmulţite cu k, unde k are valoarea dată mai sus.

Ca să putem folosi această metodă, trebuie să cunoaştem două grupuri de 4 numere, care satisfac ecuaţia iniţială. Unul din aceste grupuri (3, 4, 5, – 6) îl cunoaştem. De unde să luăm încă un grup? Soluţia o putem afla simplu: pentru cel de-al doilea grup putem lua numerele r, —r, s, —s care, evident, satisfac ecuaţia iniţială. Cu alte cuvinte să luăm:

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5,\ d = -6,$$
$$\alpha = r,\ \beta = -r,\ \gamma = s,\ \delta = -s.$$

Atunci pentru k vom obţine următoarea valoare:

$$k = -\frac{-7r-11s}{7r^2-s^2} = \frac{7r+11s}{7r^2-s^2}$$ 9

iar numerele a + kx, b + k [i, e + ky, d k 8 vor fi respectiv egale cu:

$$\frac{28r^2+11rs-3s^2}{7r^2-s^2},\quad \frac{21r^2-11rs-4s^2}{7r^2-s^2},$$
$$\frac{35r^2+7rs+6s^2}{7r^2-s^2},\quad \frac{-42r^2-7rs-5s^2}{7r^2-s^2}.$$

Potrivit celor relatate mai sus, aceste patru expresii satisfac ecuaţia iniţială:

x3 + y3 + z3 + t3 = 0.

Deoarece toate cele patru expresii au acelaşi numitor, îl putem lăsa la o parte (adică numărătorii acestor fracţii, satisfac, de asemenea, ecuaţia considerată). Deci, pentru orice valori atribuite lui r şi s, ecuaţia dată va fi satisfăcută de următoarele numere:

$$x = 28r^2 + 11rs - 3s^2,$$
$$y = 21r^2 - 11rs - 4s^2,$$
$$z = 35r^2 + 7rs + 6s^2,$$
$$t = -42r^2 - 7rs - 5s^2,$$

de aceasta putându-ne convinge şi direct, ridicând aceste expresii la cub şi adunându-le. Atribuind lui r şi s diferite valori întregi, vom obţine un şir de soluţii întregi ale ecuaţiei noastre. În cazul când numerele obţinute au un factor comun, atunci le putem împărţi prin el. De exemplu, pentru r – 1, s = 1, obţinem pentru x, y, z, t următoarele valori: 36, 6, 48, —54, sau simplificând cu 6, valorile 6, 1, 8, —9. În felul acesta,

63 + l3 + 83 = 93.

Iată încă o serie de egalităţi de acelaşi tip (obţinute după împărţirea prin di vizorul comun):

$$\begin{aligned}
&\text{pentru } r=1,\ s=2 && 38^3+73^3=17^3+76^3,\\
&\text{pentru } r=1,\ s=3 && 17^3+55^3=24^3+54^3,\\
&\text{pentru } r=1,\ s=5 && 4^3+110^3=67^3+101^3,\\
&\text{pentru } r=1,\ s=4 && 8^3+53^3=29^3+50^3,\\
&\text{pentru } r=1,\ s=-1 && 7^3+14^3+17^3=20^3,\\
&\text{pentru } r=1,\ s=-2 && 2^3+16^3=9^3+15^3,\\
&\text{pentru } r=2,\ s=-1 && 29^3+34^3+44^3=53^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Se observă că dacă în primul grup de 4 numere 3, 4, 5, —6, sau într-unul din grupurile obţinute de noi, schimbăm locul numerelor şi aplicăm aceeaşi metodă, obţinem o nouă serie de soluţii. De pildă, dacă luăm grupul 3, 5, 4, —6 (adică a = 3, 6=5, e = 4, d – – 6), obţinem pentru x, y, z, şi t valorile:

$$\begin{aligned} x &= 20r^2 + 10rs - 3s^2 \\ y &= 12r^2 - 10rs - 5s^2, \\ z &= 16r^2 + 8rs + 6s^2, \\ t &= 24r^2 - 8rs - 4s^2. \end{aligned}$$

De aici, pentru diferite valori ale lui r şi s, obţinem o serie de relaţii noi:

$$\begin{aligned} &\text{pentru } r=1,\ s=1 && 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3, \\ &\text{pentru } r=1,\ s=3 && 23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3, \\ &\text{pentru } r=1,\ s=5 && 5^3 + 163^3 + 164^3 = 206^3, \\ &\text{pentru } r=1,\ s=6 && 7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3, \\ &\text{pentru } r=2,\ s=1 && 23^3 + 97^3 + 86^3 = 116^3, \\ &\text{pentru } r=1,\ s=-3 && 3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3 \text{ etc.} \end{aligned}$$

în felul acesta se poate obţine o infinitate de soluţii pentru ecuaţia considerată.

O sută de mii de mărci pentru demonstrarea unei teoreme

Una din problemele din domeniul ecuaţiilor nedeterminate a devenit celebră, deoarece pentru rezolvarea ei s-a oferit o avere: 100 000 de mărci germane!

Problema constă în a demonstra următoarea propoziţie, cunoscută sub denumirea de „marea teoremă” a lui Fermat *:

Suma a două numere întregi ridicate la aceeaşi putere nu poate fi egală cu un al treilea număr întreg ridicat şi el la aceeaşi putere. Excepţie face numai puterea a doua pentru care acest fapt este posibil.

* Fermat (1603 – 1665) n-a fost matematician de profesie. Jurist şi consilier în parlament, el se ocupa cu studii matematice numai în timpul liber. Cu toate acestea, el a făcut o serie de descoperiri extrem de importante pe care nu le-a publicat, ci, după obiceiul epocii, le-a comunicat în scrisorile sale adresate prietenilor săi savanţi: Pascal, Descartes, Huyghens, Roberval şi alţii.

Ou alte cuvinte, trebuie demonstrat că ecuaţia xn + yn = zn nu poate fi rezolvată în numere întregi pentru n > 2.

Să explicăm cele spuse mai sus. Am văzut că ecuaţiile:

x2 -f y2 = z2, x3 + y3 + z3 = t3

admit mai multe soluţii întregi. Dar încercaţi să găsiţi trei numere întregi pozitive, care să satisfacă condiţia ’x3 -f + y3 – z3, şi veţi vedea că munca voastră va fi zadarnică.

Acelaşi eşec vă aşteaptă şi la căutarea exemplelor pentru puterile 4, 5, 6 etc. Tocmai în aceasta constă „marea teoremă a lui Fermat”.

Ce se cere, deci, de la concurenţi pentru obţinerea premiului? Ei trebuie să demonstreze teorema pentru toate puterile pentru care ea este valabilă. Într-

adevăr, teorema lui Fermat nu este încă demonstrată şi ea, cum s-ar zice, atârnă în aer.

Au trecut trei secole de când ea a fost enunţată, dar matematicienii n-au reuşit s-o demonstreze. Cei mai mari matematicieni au muncit la rezolvarea acestei probleme, dar în cazul cel mai fericit ei reuşeau să demonstreze teorema numai pentru anumiţi exponenţi; or, este necesar să se găsească demonstraţia generală pentru orice exponent întreg.

Este interesant de remarcat că demonstraţia teoremei lui Fermat a fost deja găsită, dar s-a pierdut ulterior.

Autorul teoremei, genialul matematician din secolul al XYII-lea, Pierre Fermat, afirma că el a demonstrat această teoremă. El şi-a notat „marea sa teoremă" (ca şi o serie de alte teoreme din teoria numerelor) sub formă de însemnare pe marginile lucrării lui Diofant, adăugând: ;

„Am găsit o demonstraţie cu adevărat uimitoare a acestei propoziţii, dar aci este prea puţin spaţiu ca s-o pot reda".

Xici printre hârtiile marelui matematician, nici în co- j respondenţa lui, nicăieri nu s-au găsit urmele acestei de-: monstraţii.

Urmaşii lui Fermat au fost nevoiţi să urmeze căi proprii. Iată rezultatele eforturilor lor: Euler (1797) a de- 1

monstrat teorema lui Fermat pentru puterea a 3-a; pentru puterea a 5-a a demonstrat-o Legendre (1823), pentru puterea a 7-a * – Lame (1840). În 1849, Kummer a demonstrat teorema pentru un grup destul de mare de puteri şi, printre altele pentru toţi exponenţii mai miei ea 100. Aceste lucrări depăşesc limitele domeniului din matematică pe care l-a cunoscut Fermat şi este de neînţeles cum a putut Fermat să găsească o demonstraţie generală pentru „marea sa teoremă".

Celor care se interesează de istoricul şi starea actuală în care se află problema lui Fermat le recomandăm broşura lui A. I. Hincin – Marea teoremă a lui Fermat. Scrisă de un specialist, broşura aceasta presupune din partea cititorului numai cunoştinţe elementare de matematică.

* Pentru exponenţii neprimi (afară de 4) nu se cere o demonstraţie specială: aceste cazuri se reduc ia cazurile cu exponenţi primi.

CAPITOLUL V

A ŞASEA OPERAŢIE MATEMATICĂ A şasea operaţie

Adunarea şi înmulţirea au câte o operaţie inversă, care se numesc scăderea şi împărţirea. A cincea operaţie matematică – ridicarea la putere – are două operaţii inverse: aflarea bazei şi aflarea exponentului. Aflarea bazei este a şasea operaţie matematică şi se numeşte extragerea rădăcinii. Aflarea exponentului – a şaptea operaţie – se numeşte logaritmare. Nu este greu să înţelegem de ce ridicarea la putere are două operaţii inverse, în timp ce adunarea şi înmulţirea au numai câte o operaţie inversă: ambii termeni ai unei sume (primul şi al doilea) joacă acelaşi rol, ei

pot să-şi schimbe reciproc locurile; aceeaşi afirmaţie este valabilă în cazul înmulţirii; în ceea ce priveşte numerele care intervin în operaţia de ridicare la putere, adică baza şi exponentul, ele nu au acelaşi rol; în general, ele nu pot fi permutate (de exemplu, 35 =f= 53). De aceea, aflarea fiecăruia din numerele care iau parte la adunare şi înmulţire se face prin aceleaşi procedee, pe când aflarea bazei şi exponentului se face în mod diferit.

A şasea operaţie, extragerea rădăcinii, se notează cu ţ.) Nu toată lumea ştie că acest semn nu este altceva decât forma puţin schimbată a literei latine r, prima literă a cuvântului latinesc care înseamnă „rădăcină”. A fost un timp (secolul al XVI-lea), când semnul radicalului n-a fost litera r mică, ci litera R, iar alături de ea se punea prima literă a cuvintelor latine „pătrată” (q) sau „cubică” (c), pentru a se arăta care anume rădăcină trebuie extrasă ’.

* în manualul de matematică al lui Magniţki, după care se învăţa < în Rusia în prima jumătate a secolului al XVIII-lea, nu există de loc semnul radicalului.

De exemplu, se scria:

R. Q. 4352

în loc de notaţia de astăzi:

$\sqrt{4352.}$

Dacă mai adăugăm la aceasta că în acea epocă nu intraseră încă în uz semnele actuale pentru plus şi minus, ci în locul lor se scriau literele p. Şi m., şi că parantezele noastre erau înlocuite cu seninele [_ _!, ne putem da seama ce aspect neobişnuit pentru ochiul nostru aveau expresiile algebrice de atunci.

Iată un exemplu din cartea matematicianului italian Bombelli (1572):

$R \cdot c \cdot \lfloor\_ R \cdot q \cdot 4352\ p \cdot 16 \_\rfloor m \cdot R \cdot c \cdot \lfloor\_ R \cdot q \cdot 4352\ m \cdot 16 \_\rfloor .$

Noi am fi scris această expresie astfel:

n_ $\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16} - \sqrt[3]{\sqrt{4352}-16.}$

în afară de notaţia]/ a se mai foloseşte pentru această operaţie şi notaţia al/», care este foarte comodă în sensul generalizării: ea pune în evidenţă faptul că orice rădăcină nu este altceva decât o putere, a cărui exponent este un număr fracţionar.

Această notaţie a fost propusă de eminentul matematician olandez din secolul al XVI-lea, Stevin.

Ce este mai mare?

L’riraa problemă

Ce este mai mare: 5 sau 1^2?

Această problemă ca şi cele ce vor urma trebuie rezolvate fără a calcula valoarea rădăcinilor.

Rezolvare

Ridicând ambele expresii la puterea a 10-a, obţinem: $(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25,\ (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32;$

deoarece 32 >25, rezultă că şi

f $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$

l’robloina a doua

Ce este mai mare: 4 sau]/ 7?

Rezolvare

Bidicând ambele expresii la puterea a 28-a, obţinem: Deoarece 128 >49, rezultă că

$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$

Problema a treia

Ce este mai mare:]/ 7 -t-]/lO sau]/3 -f]/l9?

Rezolvare

Ridicând ambele expresii la nătrat obţinem:

$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70},$
$(\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$

Să micşorăm ambele expresii cu 17; rămâne:

2 VtO şi 5 + 2 V57.

Ridicăm aceste expresii la pătrat. Avem:

280 şi 253 + 20^57.

Scăzând din fiecare expresie numărul 253, să comparăm numerele

27 şi 20 V57.

Deoarece]/57 este mai mare decât 2, reiese că: 20 y’57 >40; prin urmare, yă+yi9 > y? + yro.

Să se rezolve dintr-o privire

Problemă

Uitaţi-vă mai atent la ecuaţia:

x*3 = 3

şi spuneţi eu ce este egal x.

Rezolvare

Orice persoană familiarizată cu simbolurile algebrice îşi va da seama că:

$x = \sqrt[3]{3}.$

într-adevăr: $x^3 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$ şi, prin urmare, x*s = X3 = 3, adică ceea ce se cere.

Cei care nu sunt în măsură să rezolve ecuaţia dată „dintr-o privire” pot afla necunoscuta în felul următor.

Fie:

x3 = y.

Atunci:

$x = \sqrt[3]{y}$

şi ecuaţia capătă forma: sau, ridicând la cub:

yy = 33.

Este clar că y = 3, şi deci $x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$

Farse algebrice

Prima problemă

A şasea operaţie algebrică ne permite să prezentăm adevărate farse algebrice, ca: în ce fel 2 • 2 = 5, 2 = 3 etc. Umorul acestor reprezentaţii algebrice constă în aceea că eroarea – destul de elementară – este mascată şi nu bate la ochi. Yom prezenta două piese din acest repertoriu comic din domeniul algebrei.

Prima:

2=3.

Pe scenă apare la început egalitatea indiscutabilă: 4-10= 9-15.

În „actul” al doilea, la ambii membri ai egalităţii se adaugă valoarea 6 —:

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}.$$

Desfăşurarea ulterioară a farsei constă în transformările:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right).$$

Extrăgând rădăcina pătrată din ambii termeni, obţinem:

$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$. 5. I

Adăugând la ambii membri fracţia –, ajungem la următoarea egalitate absurdă:

2=3.

În ce constă greşeala?

Itezolvare

Greşeala s-a strecurat în următorul loc: din egalitateas-a dedus că: $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$.

Bacă pătratele a două cantităţi sunt egale, nu reiese că şi aceste cantităţi sunt egale între ele. Be exemplu (—5)2 = = 52, dar —5 nu este egal cu 5. Pătratele pot fi egale între ele şi atunci când cantităţile ridicate la pătrat sunt diferite între ele. Exemplul nostru prezintă chiar cazul acesta:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

dar – – nu este egal cu —.

2 s 2

Problema a doua

O altă farsă algebrică (fig. 15):

2-2=5

se demonstrează după exemplul din problema precedentă şi se bazează pe acelaşi truc. Pe scenă apare egalitatea asupra căreia nu încape nicio îndoială:

16 – 36 = 25 – 45.

Se adaugă două numere egale: şi se fac următoarele transformări:

$$4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

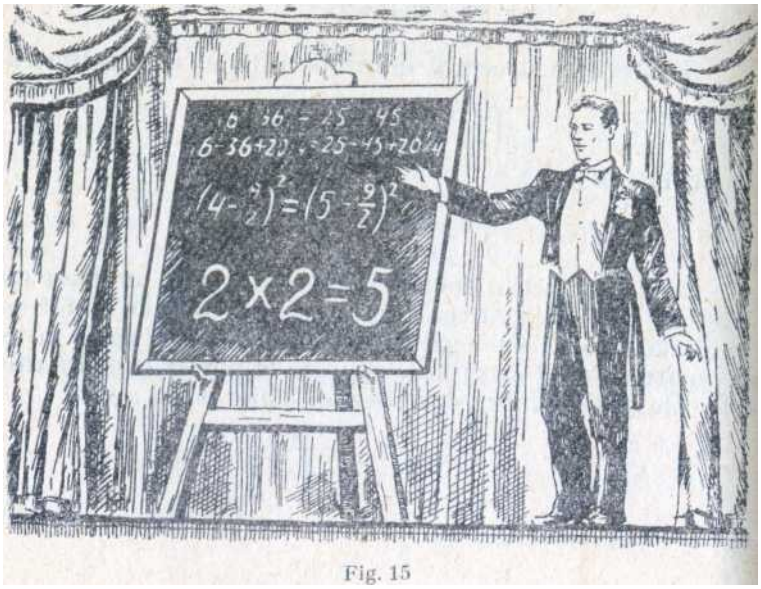


Fig. 15

Apoi prin acelaşi raţionament nejustificat se trece la final:

’ 9. 9_

2 2 4 = 5,

2 -2=5.

Aceste cazuri comice au ca scop să pună în gardă pe cei care nu posedă o experienţă suficientă în domeniul mate- • maticii faţă de operaţiile imprudente cu ecuaţiile care conţin necunoscute sub radical.

CAPITOLttji VI

ECUAŢIILE DE GRADUL DOI Strângerile de mină

Problemă

Participanţii la o şedinţă şi-an strâns mâinile şi cineva a calculat că în total au fost 66 de strângeri de mină. Câţi oameni au fost la şedinţă?

Rezolvare

Problema se rezolvă destul de simplu pe cale algebrică. Fiecare din cei a? participanţi a strâns x – 1 mâini. Deci, în total au avut loc x (x —1) strângeri de mână; dar trebuie ţinut seama că, atunci când Ivanov strânge mina lui Petrov, la rândul lui şi Petrov strânge mâna lui Ivanov; aceste două strângeri de mână trebuie considerate ca una singură. De aceea, numărul strângerilor de mână calculate este de două ori mai mic decât x (x —1). Avem ecuaţia:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66$$

sau, după transformare, a:2—£ – 132 = 0, de unde: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2}$, $x_1 = 12,\ x_2 = -11.$

Deoarece în cazul de faţă, soluţia negativă (—11 < oameni) este lipsită de sens, o neglijăm şi păstrăm numai | prima rădăcină: la şedinţă au participat 12 oameni.

Lin roi de albine Problemă în India antică a fost foarte popular un gen de sport foarte original – întrecerea publică în rezolvarea problemelor dificile. Manualele de matematică indiene erau folo- . Site ca îndreptare pentru asemenea întreceri. „Potrivit J regulilor expuse aici – scrie autorul unuia din aceste manuale – cel înţelept poate să întocmească o mie de alte J probleme. Aşa cum soarele prin strălucirea sa întunecă stelele, la fel un om învăţat va întuneca gloria altuia în întreceri populare, propunând şi rezolvând diferite pro- | bleme algebrice”. În original aceste cuvinte sunt spuse mai poetic, deoarece întreaga carte este scrisă în versuri. Problemele erau scrise, de asemenea, în versuri. Dăm una din ele, bineînţeles, în proză.

Un număr de albine, egal cu rădăcina pătrată din s jumătatea întregului roi, s-a aşezat pe o tufă de iasomie,

g

lăsând în urma lor – din roi. Au mai o singură albină se învârteşte în jurul unui lotus fiind atrasă de zumzetul prietenei ei, care a fost prinsă în cursa florii mirositoare. Câte; albine au fost în total în roi?

Rezolvare

Dacă vom nota numărul de albine căutat cu x, ecuaţia «va fi de forma:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x,$$

pe care o putem prezenta sub o formă mai simplă introdu- 1 când necunoscuta auxiliară: $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Atunci x = 2y2, şi ecuaţia va fi:

$$y + \frac{16y^2}{9} + 2 = 2y^2,\ \text{sau}\ 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

Rezolvând-o, obţinem două valori pentru y:

$$y_1 = 6,\quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Valorile corespunzătoare pentru x:

— 72, x2 – 4,5.

Deoarece numărul albinelor trebuie să fie un număr întreg şi pozitiv, numai prima rădăcină satisface problema: roiul era compus din 72 de albine. Să verificăm:

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \cdot 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

O ceată de maimuţe

Problema

O altă problemă indiană, o vom da în versuri, aşa cum a tradus-o autorul cărţii Cine a inventat algebra? V. I. Lebedev:

împărţite-n două grupe Se jucau nişte maimuţe.

O optime dintre ele ridicată la pătrat Se jucau Într-un tufiş;

Alte douăsprezece

Se hârjoneau În poiana din apropiere,

Spune-mi cititorule Câte maimuţe erau acolo?

Rezolvare

Dacă numărul total de maimuţe este x, atunci: de unde:

Zj = 48, a’2 = 16.

Problema are două soluţii pozitive: în ceată erau fie 48 de maimuţe, fie 16. Ambele soluţii satisfac problema.

Cât de prevăzătoare pot fi ecuaţiile în cazurile analizate, atunci când am obţinut două soluţii, am procedat diferit, în funcţie de condiţiile problemei. În primul caz, am neglijat rădăcina negativă ca una care nu corespunde conţinutului problemei, în al doilea caz, am lăsat la o parte rădăcina fracţionară şi nega- = tivă, iar în problema a treia, dimpotrivă, am folosit ambele rădăcini. Existenţa unei a doua soluţii constituie adesea o surpriză pentru cel care a rezolvat problema, sau chiar pentru cel care a întocmit-o. Yom da un exemplu în care ecuaţia este mai prevăzătoare decât creatorul ei.

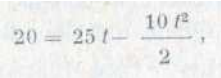
O minge este aruncată în sus cu o viteză de 25 m pe secundă. Peste câte secunde ea va fi la o înălţime de 20 m deasupra pământului 1

Rezolvare

Pentru corpurile aruncate în sus, dacă facem abstracţie de rezistenţa aerului, mecanica stabileşte următoarea relaţie între înălţimea la care s-a ridicat corpul deasupra pământului (h), viteza iniţială (v), acceleraţia gravitaţiei (y) şi timpul (f):

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

în cazul de faţă, putem neglija rezistenţa aerului, deoarece la viteze neînsemnate aceasta este mică. Pentru simplificarea calculelor, admitem că g = 10 m pe secundă, în loc de 9,8 (eroarea este de 2%). Substituind în formula de mai sus valorile lui h, v şi g, obţinem ecuaţia:



iar după simplificare:

, t2 – 5t + 4=0.

Rezolvând ecuaţia, găsim:

h= 1 Şi 4-

Mingea va fi la înălţimea de 20 m de două ori: peste o secundă şi peste 4 secunde.

Acest fapt poate să pară neobişnuit şi, dacă nu stăm pe gânduri, suntem gata să neglijăm soluţia a doua. Dar ar fi o greşeală să procedăm astfel! Soluţia a doua îşi are sensul ei; mingea trebuie să fie de două ori la înălţimea de 20 m: o dată la urcare şi a doua oară la cădere. Într-adevăr, la viteza iniţială de 25 m/s mingea trebuie să zboare în sus 2,5 secunde şi să ajungă la o înălţime de 31,25 m. Atingând după o secundă înălţimea de 20 m, mingea va mai urca 1,5 secunde, apoi va coborî tot atâta timp până la nivelul de 20 m şi, după încă o secundă, va atinge pământul.

Problema lui Euler în Autobiografia sa, Stendhal povesteşte următoarele despre anii săi de învăţătură:

„L-am găsit la el (profesorul de matematică) pe Euler şi problema lui despre numărul de ouă, pe care o ţărancă le ducea la târg... Pentru mine aceasta a fost o descoperire. Am înţeles ce înseamnă să te poţi folosi de instrumentul numit algebră. Dar, drace, nimeni nu mi-a vorbit despre asta..

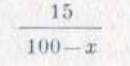
Iată această problemă din Introducerea în algebră a lui Euler, care a exercitat un efect atât de puternic asupra minţii tânărului Stendlial.

Două ţărănoi au adus împreună la târg 100 de ouă, una avea mai multe decât cealaltă; ambele au încasat sume egale. Atunci prima i-a spus celeilalte: „Dacă aş avea ouăle tale, aş fi încasat 15 creiţari”. Cea de-a doua i-a răspuns: „Iar dacă eu aş fi avut ouăle tale, aş fi încasat 2

pentru ele 6 – creiţari”. Câte ouă avea fiecare?

Rezolvare

Să presupunem că prima ţărancă avea x ouă, atunci cealaltă avea 100 – x. Dacă prima ar fi avut 100 – x ouă, ea ar fi încasat 15 creiţari. Înseamnă că prima ţărancă a vândut ouăle cu



creiţari bucata.

În acelaşi mod aflăm că a doua ţărancă le-a vândut cu creiţari. $6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$

Acum se poate stabili cât a încasat fiecare:

$$\text{prima : } \quad x \cdot \frac{15}{100-x} = \frac{15x}{100-x},$$

$$\text{a doua : } (100-x) \cdot \frac{20}{3x} = \frac{20(100-x)}{3x}$$

Deoarece ambele au încasat aceeaşi sumă, rezultă că:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20\,(100-x)}{3x},$$

şi după transformare: de unde: $x^2 + 160\,x - 8\,000 = 0,$

$$x_1 = 40,\ x_2 = -200.$$

în cazul de faţă, rădăcina negativă n-are sens; problema este satisfăcută de o singură soluţie: prima ţărancă a adus 40 de ouă, a doua – 60.

Problema poate fi rezolvată şi cu o altă metodă, care este mult mai ingenioasă, dar şi mai greu de găsit.

Presupunem că a doua ţărancă a adus de k ori mai multe ouă decât prima. Amândouă au încasat sume egale; aceasta înseamnă că prima ţărancă şi-a vândut ouăle de k ori mai scump decât a doua. Dacă înainte de a începe vânzarea ele şi-ar fi schimbat ouăle, atunci prima ţărancă ar fi avut de k ori mai multe ouă decât a doua şi le-ar fi vândut de k ori mai scump. Ca atare, ea ar fi încasat de k3 ori mai mult decât a doua. Prin urmare, avem:

$$k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

de unde:

$$k = \frac{3}{2}.$$

Acum ne rămâne să împărţim 100 de ouă în părţi proporţionale cu 2 şi 3. Aflăm că prima ţărancă avea 40, iar a doua 60 de ouă.

Megafoanele

Problemă în piaţă sunt instalate 5 megafoane, împărţite în două grupuri: în primul – două, iar în al doilea – trei aparate. Distanţa dintre grupuri este de 50 m. În ce loc trebuie să stăm pentru ca sunetele de la ambele grupuri să fie auzite cu aceeaşi intensitate?

Rezolvare

Dacă notăm cu x distanţa de la grupul mai mic până la punctul căutat, atunci distanţa de la grupul mai mare până la acest punct va fi dată de expresia 50 – x (fig. 16).

Cunoscând că intensitatea sunetului scade proporţional cu pătratul distanţei, avem ecuaţia:

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50-x)^2},$$

care după simplificare devine:

x2 + 200x – 5 000 = 0.

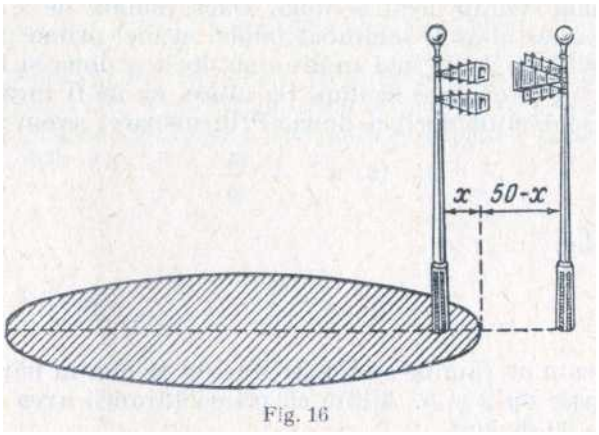


Fig. 16

Eezolvând-o, obţinem două rădăcini:

x\ = 22,5,

*2 = -222,5.

Eădăcina pozitivă răspunde direct la întrebarea pro- 1 blemei: punctul de egală intensitate a audibilităţii se află, la 22,5 m de grupul format din două megafoane şi, prin urmare, la 27,5 m de grupul format din trei aparate.

Dar ce înseamnă rădăcina negativă a ecuaţiei? Oare; aceasta are sens?

Incontestabil, semnul minus înseamnă că al doilea ■ punct de egală intensitate a audibilităţii este aşezat în direcţia opusă aceleia care a fost adoptată ca pozitivă î la întocmirea ecuaţiei.

Măsurând de la amplasarea celor două aparate în direcţia cerută 222,5 m, aflăm punctul unde sunetele ambelor grupuri de megafoane se aud cu aceeaşi intensitate. De ia grupul de trei aparate acest punct se află la 222,5 m 4- -f- 50 m = 272,5 m.

În felul acesta am aflat două puncte de egală intensitate a audibilităţii, situate pe dreapta care uneşte sursele de sunete. Alte puncte pe această dreaptă nu există, dar ele există în afară de ea. Se poate demonstra că locul geometric al punctelor, care satisfac condiţiile problemei noastre, este cercul care are ca diametru

segmentul care uneşte cele două puncte aflate. Acest cerc delimitează un sector destul de vast (haşurat pe figură), în interiorul căruia audibilitatea grupului format din două aparate întrece audibilitatea grupului de trei aparate, iar dincolo de limitele acestui cere observăm fenomenul invers.

Algebra zborului spre Lună

Problema cu megafoane este foarte apropiată de cea a zborului spre Lună cu ajutorul unor rachete. Mulţi oameni sunt sceptici în ceea ce priveşte atingerea acestui scop, deoarece diametrul aparent al Lunii, pentru un observator de pe Pământ, este aproximativ de 0,5°. Un studiu mai amănunţit al problemei arată că dacă racheta va putea trece mai departe de punctul de egală atracţie a Pământului şi a Lunii – ea se va deplasa spre Lună sub acţiunea numai a atracţiei ei. Să căutăm acest punct de atracţie egală.

Potrivit legii lui îfewton, forţa cu care se atrag două mase este proporţională cu produsul maselor ce se atrag şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele. Dacă masa Pământului este M, iar distanţa rachetei de la Pământ este x, atunci forţa cu care Pământul va atrage un gram de masă a rachetei va fi dată de expresia:

Mk

X2

unde fe este forţa cu care se atrag două mase de câte un gram la distanţa de 1 cm.

Forţa cu care Luna atrage un gram de masa a ra- chetei în acelaşi punct este egală cu:

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

unde m este masa Lunii, iar l – distanţa între Lună şi Pământ (se presupune că racheta se află între Lună şi Pământ, pe dreapta care uneşte centrele lor). Se cere ca:

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2},$$

sau:

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}.$$

Se ştie din astronomie că raportul pi 81,5; deci:

m

$$\frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2} = 81{,}5$$

de unde:

80,5x2 —163,0/x -f 81,5/2= 0.

Rezolvând ecuaţia în raport cu x, obţinem:

x, = 0,9/, x2 = 1,12 /.

Ca şi în problema cu megafoanele, ajungem la concluzia că, pe linia Pământ – Lună, există două puncte unde racheta va fi atrasă la fel de cele două planete; unul situat la distanţa de 0,9 l de centrul Pământului, al doilea – la distanţa de 1,12 l de acelaşi centru. Deoarece distanţa l între cele două planete este «384 000 km, unul din punctele căutate ya fi la distanţa de 346 000 km de centrul Pământului, iar celălalt – la 430 000 km.

Dar noi ştim (vezi problema precedentă) că aceeaşi proprietate o au toate punctele situate pe un cerc care trece prin cele două puncte având ca diametru segmentul care le uneşte. Dacă rotim acest cerc în jurul liniei care uneşte centrele Pământului şi al Lunii, el va descrie o

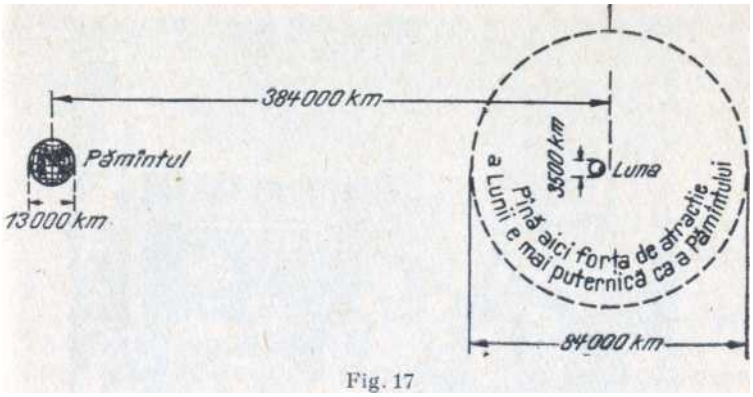


Fig. 17

suprafaţă sferică, cu proprietatea că toate punctele ei satisfac cerinţele problemei.

Diametrul acestei sfere este egal cu:

1,12? —0,9/ = 0,22/ Ss 84 000 km.

Când racheta se va afla în interiorul acestei sfere (având o viteză nu prea mare), ea va trebui neapărat să cadă pe suprafaţa Lunii, deoarece forţa de atracţie a Lunii în această regiune întrece forţa de atracţie a Pământului (fig. 17).

Ţinta în care trebuie să nimerească racheta este mult mai mare decât s-ar crede şi ocupă pe cer nu 0,5°, ci, aşa cum reiese dintr-un calcul geometric simplu, circa 12°. Acest fapt uşurează considerabil sarcina navigatorilor în spaţiul interastral.

De data aceasta ecuaţia s-a dovedit a fi mai prevăzătoare decât cel care a întocmit-o.

Trecând la rezolvarea problemei, v-aţi gândit oare că atracţia Pământului este mai mare decât a Lunii, atât înaintea Lunii cât şi după ea? Analiza algebrică a arătat această situaţie şi ne-a ajutat să delimităm precis sferele de influenţă ale celor două planete.

„O problemă grea”

Tabloul lui Bogdanov-Belsif „0 problemă grea” este cunoscut de mulţi, dar puţini dintre acei care l-au văzut au pătruns sensul „problemei grele” redate. Ea constă în aceea că pe cale mintală trebuie să se afle repede rezultatul calculului:

1Q2 na + 122 -L 132 _|_ 142 365

Într-adevăr, problema nu este prea uşoară, dar ştiau să o rezolve şi elevii învăţătorului al cărui portret este redat în tabloul din fig. 18, şi anume S. A. Eacinski,

Fig. 18

profesor de ştiinţe naturale care a părăsit catedra universitară pentru a deveni un simplu învăţător de ţară. Acest pedagog talentat a cultivat în şcoala sa calculele mintale, bazate pe folosirea cu virtuozitate a proprietăţilor numerelor. Numerele 10, 11, 12, 13 şi 14 posedă o proprietate interesantă:

io2 + ii2 + 122 = 132 + 142.

Deoarece 100 -f- 121 +144 = 365, este uşor de aflat că expresia din tablou este egală cu 2.

Cu ajutorul algebrei putem aborda mai general problema acestei interesante proprietăţi a unui şir de numere: oare şirul de mai sus, format din cinci numere

consecutive, este unicul în care suma pătratelor primelor trei numere este egală cu suma pătratelor ultimelor două?

Rezolvare

Notând primul număr din cele căutate cu x, avem ecuaţia:

x2 + (x + l)2 + (x 4- 2)2 = (x 4- 3)2 + (x + 4)2.

Este mai comod însă să notăm cu x nu primul, ci al doilea număr căutat. Atunci ecuaţia va avea forma următoare:

(x-l)2 4- x2 (x -f l)2 = (x 4- 2)2 (x 4- 3)2.

Desfăcând parantezele şi făcând reducerile, obţinem:

x2 – 10x – îi = o, de unde:

$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 11},\ x_1 = 11,\ x_2 = -1.$$

Există, deci, două şiruri de numere care posedă proprietăţile date: şirul lui Racinski:

10. 11, 12, 13, 14, şi şirul:

— 2. — î, o, i, 2.

Într-adevăr,

(- 2)2 + (- l)2 + 02= l2 + 22.

Ce îel de numere?

Problemă

Să se afle trei numere consecutive care au proprietatea că pătratul numărului de mijloc este mai mare cu unu decât produsul celorlalte două.

Rezolvare

Dacă primul număr din cele căutate este x, ecuaţia va fi de forma:

(x + l)2 = x (x + 2) + 1.

Desfăcând parantezele, obţinem egalitatea:

x2 + 2x + 1 = x2 + 2x + 1, din care nu se poate determina valoarea lui x. Aceasta înseamnă că egalitatea noastră este o indentitate; ea este adevărată pentru orice valoare a lui x, şi nu numai pentru anumite valori, cum se întâmplă în cazul unei ecuaţii. Deci, oricare trei numere consecutive posedă proprietetea cerută. Să luăm la întâmplare numerele:

17, 18, 10.

Xe convingem că:

182 – 17- 19 = 324 – 323 = 1.

Existenţa acestei relaţii apare mai clar dacă vom nota eu x al doilea număr. Atunci vom avea egalitatea:

x2 – l = (x + l)(x – 1), care esie o indentitate evidentă.

CAPITOLUL VII

CELE MAI MARI ŞI CELE MAI MICI VALORI

Problemele cuprinse în acest capitol fac parte dintr-o categorie interesantă de probleme necesare pentru aflarea celei mai mari sau a celei mai mici valori a unei mărimi. Ele pot fi rezolvate prin diferite metode, dintre care una o vom prezenta mai jos.

Două trenuri

Problemă

Două linii ferate se încrucişează sub un unghi drept. Spre locul de încrucişare se îndreaptă în acelaşi timp două trenuri: unul care a plecat de la o gară situată la 40 km de încrucişare şi altul – de la o altă gară aflată la 50 km. Primul tren parcurge într-un minut 800 m, iar al doilea, 600 m.

Pentru câte minute (din momentul pornirii lor) cele două trenuri se vor afla la distanţa minimă unul de celălalt? Şi cât este de mare această distanţă?

Itezolvarp

Să desenăm o schemă care să reprezinte mişcarea celor două trenuri din problema noastră (fig. 19). Liniile care se încrucişează le figurăm prin dreptele AB şi CD. Gara B este situată la 40 km de punctul de încrucişare O, gara D – la 50 km. Presupunem că peste x minute cele două trenuri se vor afla la distanţa minimă unul de celălalt, MN – m. Trenul care a plecat din B a parcurs până la aceiit moment un drum BM – 0,8*, deoarece în timp de un minut el parcurge 800 m = 0,8 km. Prin urmare,

OM = 40 – 0,8». În acelaşi fel vom afla că ON = 50 – – 0,6». Conform teoremei lui T’i ta gura:

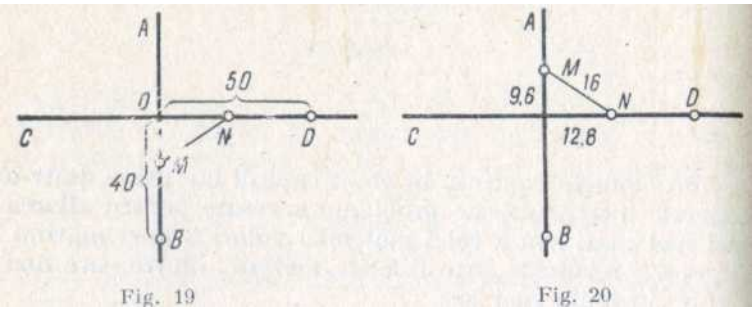


Fig. 19

Fig. 20

$$MN = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}.$$

Eidicând la pătrat ambii membri ai ecuaţiei:

$$m = \sqrt{(40 - 0{,}8\,x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}$$

şi făcând reducerile, obţinem:

x2 – 124x H- 4 100 – m2 = 0.

Rezolvând această ecuaţie în raport cu x, avem:

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Deoarece x reprezintă un număr de minute, deci nu poate fi imaginar, rezultă că m2 – 256 trebuie să fie o mărime pozitivă sau, în cazul extrem, să fie egal cu zero. Când m2 – 256 = 0, se obţine valoarea minimă a lui m, şi atunci:

m2 = 256, de unde m= 16.

Este evident că m nu poate fi mai mic decât 16, deoarece x ar deveni imaginar. Atunci când m2 – 256 = = 0, x – 62.

Aşadar, trenurile noastre se vor afla la cea mai mică distanţă unul de celălalt după 62 minute, iar distanţa lor va fi de 16 km.

Să stabilim cum sunt situate trenurile în acest mo-i ment. Să calculăm distanţa OM-, ea este egală cu:

40 – 62 • 0,8 = – 9,6.

Semnul minus înseamnă că primul tren va depăşi punctul de încrucişare cu o distanţă de 9,6 km. Distanţa () N este egală cu:

50 – 62 ■ 0,6 = 12,8, adică al doilea tren mai are de parcurs până.la punctul de incrucişare 12,8 km.

Poziţia trenurilor este arătată în fig. 20. După cum vedem nu este aceea pe care ne-am închipuit-o înainte de rezolvarea problemei. Ecuaţia s-a dovedit a fi tolerantă şi, cu toate că schema a fost dată greşit, a dat o rezolvare corectă. ÎJu este greu de dedus de unde decurge acest lucru: el este determinat de regulile algebrice ale semnelor.

Unde este mai bine să fie construită halta?

Problemă

La o distanţă de 20 km de calea ferată se află satul B (fig. 21). Unde trebuie să fie construită halta C astfel ca drumul de la A la B (porţiunea AC – pe calea ferată şi CB – pe şosea) să poată fi parcurs în cel mai scurt timp? Viteza de deplasare pe calea ferată este de 0,8 km pe minut, iar pe şosea – de 0,2 km pe minut.

Rezolvare

Vom nota distanţa AD (de la A până la perpendiculara Bl) la A D) cu a, iar distanţa Oi), cu x. Atunci AC = AD – CD = a – x, iar CB = / CD2 + BD2 =]/x2 + 202. Timpul în care trenul parcurge distanţa AC este:

AC a – x

0,8 0,8

Timpul necesar pentru a parcurge distanţa CB (pe şosea) este:

cb _ V x2 + 202

0.2 0,2

Timpul în care este parcursă distanţa de la A la B este de:

$$\frac{a-x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}.$$

Această sumă, pe care o vom nota cu m, trebuie să aibă o valoare minimă.

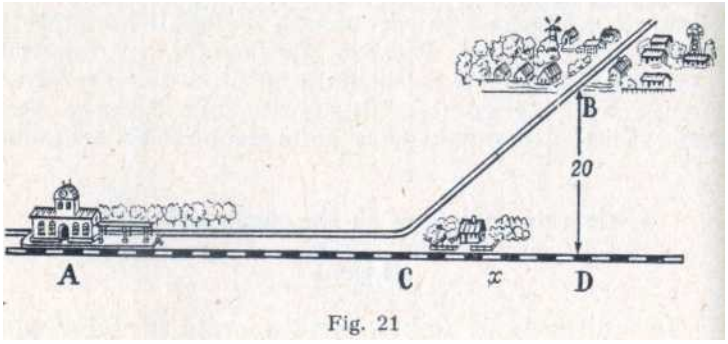


Fig. 21

Ecuaţia:

$$\frac{a-x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}=m$$

o scriem sub forma: înmulţind-o cu 0,8, ea devine:

$$-x+4\sqrt{x^2+20^2}=0,8\,m-a.$$

Notând membrul drept cu li şi eliminând radicalul, obţinem o ecuaţie de gradul al doilea:

$$15x^2-2kx+6\,400-k^2=0,$$

de unde: $x=\frac{k\pm\sqrt{16\,k^2-96\,000}}{15}.$

Deoarece h – 0,8 m – a, rezultă că pentru valoarea minimă a lui m se obţine şi valoarea minimă a lui k şi invers *. Dar pentru ca x să fie real, 16ft2 nu poate fi mai mic de 96 000. Deci, cea mai mică valoare pentru 16fc2 este 96 000. De aceea m devine minim atunci când:

16*2= 96 000, de unde: şi deci,

$$x=\frac{k\pm 0}{15}=\frac{\sqrt{6\,000}}{15}\approx 5,16.$$

Halta trebuie să fie construită la aproximativ 5 km de punctul D, oricare ar fi distanţa a – AD.

Dar, se înţelege că soluţia noastră are sens numai pentru cazurile când x< a, deoarece formând ecuaţia, am considerat expresia a – x ca fiind pozitivă.

Dacă * = a x 5,16, nu este nevoie de haltă şi şoseaua poate fi dusă direct la gară. La fel se va proceda şi în cazul când distanţa a este mai mică de 5,16 km.

De data aceasta ne-am dovedit mai prevăzători decât ecuaţia. Dacă ne-am fi luat după ea, ar fi trebuit ca luând x > a, să construim halta dincolo de gară, ceea ce ar fi o adevărată absurditate, deoarece pentru x > a, timpul în decursul căruia ar fi trebuit să mergem pe calea ferată

$$\frac{a-x}{0{,}8}$$

ar fi avut o valoare negativă. Problema de faţă ne arată că, folosind calculele matematice, trebuie să fim totdeauna atenţi la rezultatele obţinute, deoarece ele îşi pot pierde sensul real, dacă premisele pe care se bazează calculul nostru matematic nu sunt realizate.

* Trebuie ţinut seamă că avem * > 0, deoarece

0,8 m = a – x + 4 202

Cum trebuie să fie construită şoseaua?

Problemă

Din oraşul A, situat pe malul unui riu, trebuie să transportăm mărfuri în punctul B, aşezat la a km pe cursul inferior al râului şi la d km de mal (fig. 22). Cum

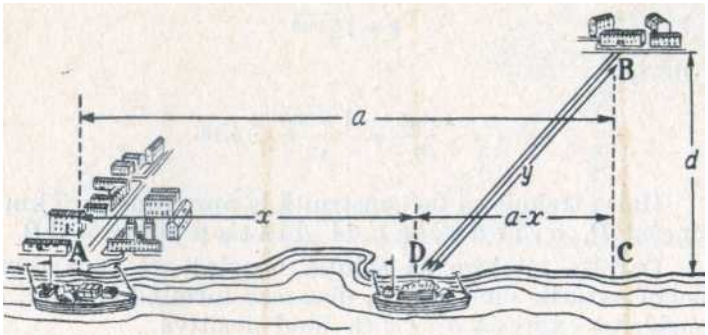


Fig. 22

trebuie construită şoseaua B spre riu, astfel ca transportul’ mărfurilor din A în B să fie cel mai ieftin posibil şi având în vedere că pe râu costul unei tone-kilometru este de două ori mai ieftin decât pe şosea?

Rezolvare

Să notăm distanţa AD cu x şi lungimea şoselei T) B cu y. Se dă distanţa AC = a şi BC = d.

Având în vedere că transportul mărfurilor pe şosea costă de două ori mai scump decât transportul pe râu, suma x + 2y trebuie să fie minimă. Vom nota această valoare minimă cu m. Avem ecuaţia:

X + 2 y = m,

Deoarece x – a – DC, iar DC =\y2 – d2 ecuaţia noastră capătă forma:

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m,$$

sau:

3j/2 – 4 (m – a) y + (m – o)2 -f d2 =’ 0.

Bezolvând această ecuaţie, obţinem:

$$y = \frac{2}{3}(m-a) \pm \frac{\sqrt{(m-a)^2 - 3d^2}}{3}.$$

Pentru ca y să fie real, (m – a)2 nu poate fi mai mic decât 3d2. Valoarea cea mai mică se obţine atunci când (m – a)2 este egal cu 3cl-, adică:

$$m - a = d\sqrt{3}, \text{ de unde } y = \frac{2(m-a)+0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin BDC = d : y, \text{ adică}$$

$$\sin BDC = \frac{d}{y} = d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

r3

Dar unghiul al cărui sinus este egal cn – este egal cu 60°. Deci şoseaua trebuie să fie construită sub un unghi de 60° faţă de râu, oricare ar fi distanţa AC.

Aici ne izbim din nou de aceeaşi particularitate pe care am întâlnit-o în problema anterioară. Soluţia poate avea sens numai în anumite condiţii. Dacă punctul B este situat astfel, încât şoseaua construită sub un unghi de 60° faţă de râu să treacă de cealaltă parte a oraşului A, atunci soluţia este inaplicabilă; punctul B ar putea fi legat de oraşul A prin şosea, nemaifiind nevoie de râu.

Când este produsul maxim?

Pentru rezolvarea multor probleme „de maxim şi minim”, adică pentru aflarea celor mai mari şi celor mai mici valori ale unei mărimi variabile, putem folosi cu succes o teoremă de algebră, pe care o vom enunţa îndată. Să considerăm următoarea problemă:

Cum trebuie să descompunem un număr în două părţi, astfel ca produsul lor să fie maxim?

Rezolvare

Fie a numărul dat. Atunci vom nota părţile în care am descompus numărul a cu:

$\frac{a}{2} + x$ şi $\frac{a}{2} - x$;

numărul x arată mărimea prin care diferă aceste părţi de jumătatea numărului a. Produsul lor este egal cu:

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

Devine clar că produsul celor doi factori creşte atunci când x scade, adică atunci când scade diferenţa dintre ei. I Produsul maxim se va obţine atunci când x = 0, deci când ambele părţi vor fi egale cu.

Prin urmare numărul nostru trebuie să fie împărţit în părţi egale; când suma a două numere rămâne constantă, produsul lor este maxim atunci când numerele date sunt egale între ele.

Să examinăm aceeaşi problemă pentru cazul a 3 numere.

Cum trebuie să descompunem un număr în 3 părţi, astfel ca produsul acestor părţi să fie maxim?

Rezolvare

La rezolvarea acestei probleme vom ţine seama de exemplul precedent.

Numărul a trebuie descompus în 3 părţi. Să presupunem că niciuna din părţi nu este egală cu – Atunci

3

printre ele se va găsi o parte mai mare decât – ^ toate trei nu pot fi mai mici decât " j; o vom nota cu:

$$\frac{a}{3} + x.$$

De asemenea, una dintre ele trebuie să fie neapărat mai mică decât —: o vom nota cu:

3 $\frac{a}{3} - y.$

Numerele x şi y sunt pozitive. Partea a treia va fi egală cu:

$$\frac{a}{3} + y - x.$$

Suma numerelor ~ şi ^ -f x – y este egală cu suma primelor două părţi ale numărului a, iar diferenţa lor, adică x – y, este mai mică decât diferenţa primelor două părţi, care este egală cu x + y. Din rezolvarea problemei precedente rezultă că produsul

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}+x-y\right)$$

este mai mare decât produsul primelor două părţi ale numărului a.

Ca atare, dacă vom înlocui primele două părţi ale numărului a cu numerele:

$$\frac{a}{3} \text{ şi } \frac{a}{3}+x-y,$$

iar pe a treia o vom lăsa neschimbată, produsul va creşte.

Să admitem că una din părţi este egală cu ~. Atunci celelalte două părţi vor fi de forma: $\frac{a}{3}+z$ şi $\frac{a}{3}-z.$

Dacă vom face aceste două părţi din urmă egale cu —

(în care caz suma lor va rămâne neschimbată), produsul lor va creşte din nou şi va fi egal cu:

$$\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}.$$

Deci, dacă vom descompune numărul a în trei părţi, care nu sunt egale între ele, produsul lor va fi mai mic decât

—, adică el va fi mai mic decât produsul a trei factori

27

egali între ei a căror sumă este egală cu a.

Teorema poate fi demonstrată în mod asemănător pentru patru, cinci etc., factori.

Să analizăm acum un caz mai general.

Să se afle pentru ce valori atribuite lui a; şi y expresia xv yq ia valoarea maximă când x + y = a.

Rezolvare

Trebuie să aflăm pentru ce valoare a lui x expresia xv (a – xf ia valoarea maximă.

Să înmulţim această expresie cu numărul – . Ob- p Q.

P r ţinem o altă expresie:

$$\frac{x^p}{p^p}\,\frac{(a-x)^q}{q^q},$$

care, evident, va lua valoarea maximă o dată cu ecuaţia iniţială.

Să punem expresia obţinută sub forma: $\underbrace{\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\ldots}_{\text{de } p \text{ ori}}\cdot\underbrace{\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\ldots}_{\text{de } q \text{ ori}}$

Suma tuturor factorilor acestei expresii este egală cu •

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots}_{\text{de } p \text{ ori}}+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\ldots}_{\text{de } q \text{ ori}}=\frac{px}{p}+\frac{q(a-x)}{q}=x+a-x=a,$$

adică cu o mărime constantă.

Pe baza celor demonstrate anterior deducem că produsul

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\ldots\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\ldots$$

ia valoarea maximă atunci când toţi factorii sunt egali între ei, adică atunci când:

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}.$$

Ştiind că a – x – y, obţinem proporţia:

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

Deci, dacă suma x y este constantă, produsul xv yQ ia valoarea maximă atunci când:

X’. Y=p: q.

La fel se poate demonstra că atunci când sumele x + y + 2, x \- y + z + t etc. Rămân neschimbate, produsele xv ya zr, xv yq: r tu etc.

Iau valoarea maximă când:

x: y: z – p: q: r; x: y: z: t = p: q: r: u etc.

Când are o sumă valoarea minimă?

Cititorul care doreşte să-şi încerce forţele în demonstrarea unor teoreme de algebră utilă să rezolve următoarele probleme:

1. Suma a două numere, al căror produs rămâne constant, este minimă atunci când cele două numere sunt egale între ele.

De exemplu, pentru produsul 36 avem: 4 + 9 = 13, 3 + 12 = 15, 2 + 18 = 20, 1 + 36 = 37 şi, în sfârşit, 6 + 6 = 12.

2. Suma mai multor numere, al căror produs este constant, este minimă atunci când aceste numere sunt egale între ele.

De exemplu, pentru produsul 216 avem:

3 + 12 + 6 = 21, 2 + 18 + 6 = 26, 9 + 6 + 4 = 19, în timp ce 6 + 6 + 6 = 18.

Yom arăta prin câteva exemple cum se aplică aceste teoreme în practică.

Grinda de volum maxim

Problemă

Se cere ca dintr-un buştean de formă cilindrică să fie tăiată o grindă dreptunghiulară de volum maxim. Ge formă trebuie să aibă secţiunea grinzii (fig. 23)?

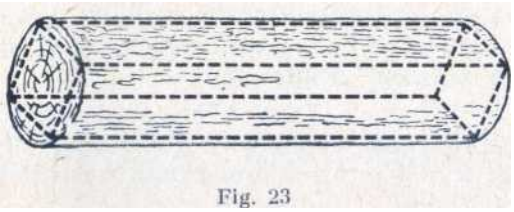


Fig. 23

Rezolvare

Dacă laturile secţiunii dreptunghiulare sunt x şi y, atunci, conform teoremei lui Pitagora, a2 + y2 = d2, unde d este diametrul buşteanului. Volumul grinzii va fi maxim, atunci când xy va avea valoarea maximă. Dar atunci când xy este maxim, produsul x2y2 va fi, de asemenea, maxim. Deoarece suma x2 + y2 rămâne constantă, produsul x2y2 devine maxim când x2 = y2 sau x = y.

Deci, secţiunea grinzii trebuie să fie pătrată.

Două loturi de păinânt

Probleme

1. Ce formă trebuie să aibă un lot dreptunghiular de arie dată, pentru ca lungimea gardului care îl mărgineşte să fie minimă?

2. Ce formă trebuie să aibă un lot dreptunghiular pentru ca, pentru o lungime dată a gardului, aria lui să fie maximă?

Rezolvare

1. Forma lotului dreptunghiular este determinată de raportul dintre laturile sale x şi y. Aria lotului cu laturile x şi y este egală cu xy, iar lungimea gardului – cu 2x + 2y. Lungimea gardului va fi minimă atunci când x + y va avea valoarea minimă.

La un produs constant xy. Suma x + y va fi minimă în cazul egalităţii x = y. Prin urmare, dreptunghiul căutat este un pătrat.

2. Dacă x şi y sunt laturile unui dreptunghi, atunci lungimea gardului va fi 2x -f- 2y, iar aria lotului, xy. Acest produs va avea valoarea maximă atunci când produsul ixy, adică 2a? • 2y, va fi maxim; produsul 2a? • 2y devine maxim când 2 a; = 2y, adică atunci când lotul este un pătrat.

Deci, la proprietăţile unui pătrat, cunoscute din geometrie, putem să mai adăugăm una nouă: dintre toate dreptunghiurile, pătratul are cel mai mic perimetru la o arie dată şi cea mai mare arie la un perimetru dat.

Zmeul de hârlic

Problemă

Un zmeu având aspectul unui sector circular trebuie să aibă o astfel de formă încât, la un perimetru dat, suprafaţa lui să fie maximă. Care trebuie să fie forma acestui sector I

Rezolvare

Să precizăm condiţiile problemei: trebuie să aflăm pentru ce raport dintre lungimea arcului sectorului şi raza lui, aria acestuia devine maximă la un perimetrul dat.

Dacă raza sectorului este x, iar arcul y, atunci perimetrul său l şi aria 8 vor fi exprimate astfel (figura 24):

$$l = 2x + y, S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l - 2x)}{2}.$$

Mărimea 8 ia valoarea |t maximă pentru aceeaşi valoare a lui x, ca şi produsul 2x (l — 2x). Deoarece suma} factorilor 2x + (l— 2x) = l§ este o mărime constantă, produsul lor va fi maxim i, când 2x=l—2x, de unde: ®

$$x = \frac{l}{4}, \; y = l - 2 \cdot \frac{l}{4} = \frac{l}{2}.$$

Astfel, la un perimetrul dat, sectorul va cuprinde suprafaţa maximă atunci când raza lui va fi egală cu i din arc (adică lungimea arcului va fi egală cu suma razelor sau lungimea părţii curbe a perimetrului va fi egală cu Iun-} gimea liniei frânte). Unghiul sectorului este pt 115°, 1 adică doi radiani. Care sunt proprietăţile de zbor al unui zmeu cu o deschidere atât de mare este o problemă care nu intră în preocupările noastre.

Construcţia unei casc

Problemă în locul unei case ruinate, de la care a rămas doar un I singur zid, se proiectează să se construiască o casă nouă. Lungimea zidului existent este de 12 m. Suprafaţa noii |

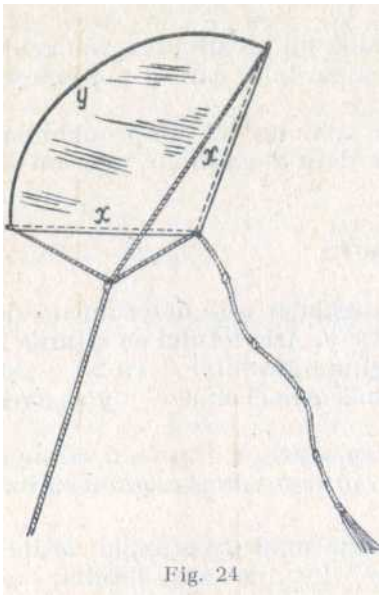


Fig. 24

case trebuie să fie egală cu 112 m2. Condiţiile lucrărilor sunt următoarele:

1. Reparaţia unui metru liniar de zid costă 25% din costul unui zid nou construit.

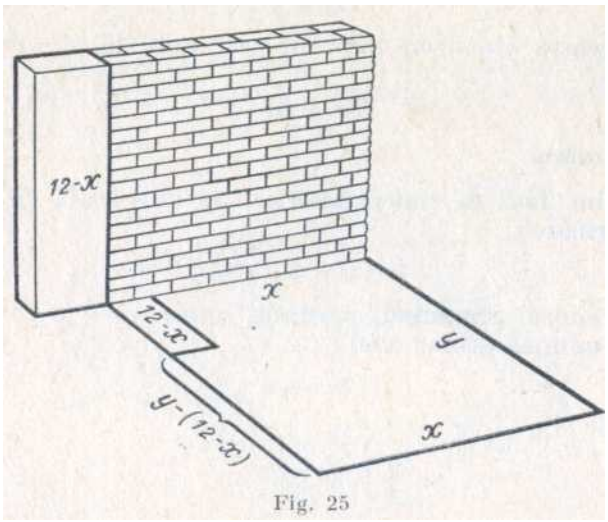


Fig. 25

2. Dărâmarea peretelui vechi şi construirea unui zid nou din materialul obţinut costă 50% din costul unui metru liniar construit din material nou.

În asemenea condiţii, cum se poate folosi în modul cel mai avantajos zidul rămas?

Rezolvare

Să presupunem că din zidul vechi se păstrează x metri, iar restul de 12 – x se demolează pentru ca materialul obţinut să fie folosit la un zid nou (fig. 25). Dacă costul executării unui metru liniar de zid din material nou este egal cu a, atunci reparaţia a x metri din zidul vechi va costa ~; executarea porţiunii din zid cu o lungime de

12 – x va costa ——; executarea celeilalte porţiuni va costa a [y – (12 – x)], adică a (y -f x – 12); al treilea zid va costa ax, iar al patrulea, ay. Întreaga lucrare va costa deci:

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y+x-12) + ax + ay = \frac{a(7x+8y)}{4} - 6a.$$

Această din urmă expresie este minimă atunci când şi suma

7x + 8 y este minimă.

Ştim însă că suprafaţa casei xy este egală cu 112; prin urmare:

lx • 8y = 56 -112.

Produsul rămânând constant, suma 7x + % ia valoarea minimă atunci când:

lx= 8y, de unde:

7

y – – x-

8

înlocuindu-l pe y din această expresie în ecuaţia:

xy = 112, obţinem:

$$\frac{7}{8}x^2 = 112, \qquad x = \sqrt{128} \approx 11{,}3.$$

Deoarece lungimea zidului vechi este de 12 m, urmează că trebuie demolaţi doar 0,7 m din acest perete.

Un lol de vilă

Problemă înainte de a se începe construcţia unei vile, trebuia îngrădit lotul de pământ pe care urma să fie construită, j Materialul existent ajungea pentru l metri liniari de gard.

Afară de aceasta, mai putea fi folosit şi un gard mai vechi (care mărginea o parte a lotului). Cum trebuie procedat ca suprafaţa îngrădită să fie maximă?

Rezolvare

Să admitem că lungimea lotului (în direcţia gardului vechi) este egală cu x, iar lăţimea (adică dimensiunea

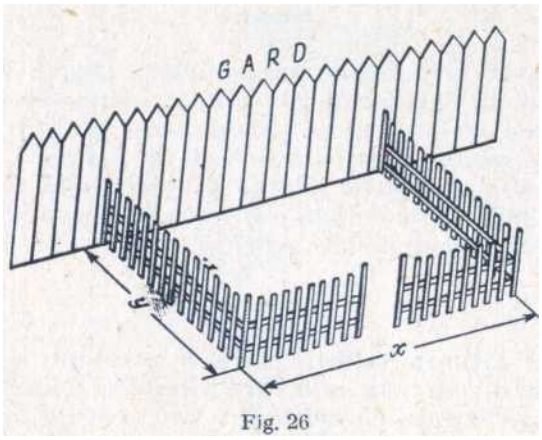


Fig. 26

lotului în direcţia perpendiculară pe acest gard) este egală cu y (fig. 26). Atunci, pentru îngrădirea acestui lot sunt necesari x + 2y metri de gard, deoarece:

x + 2y= 1.

Aria lotului este egală cu:

S= xy= y (l – 2y).

Ea este maximă o dată cu mărimea:

2y (l-2y),

(dublul ariei), care reprezintă produsul a doi factori cu suma constantă l. De aceea, pentru a obţine aria maximă trebuie ca:

2y = l-2y, de unde:

$$y=\frac{l}{4}, \quad x=l-2y=\frac{l}{2},$$

Cu alte cuvinte, x – 2y (lungimea lotului) trebuie să fie de două ori mai mare decât lăţimea sa.

Jţjhealml eu eea mai mică secţiune

Problemă

O tablă metalică dreptunghiulară (fig. 27) trebuie ’ să fie îndoită sub formă de jgheab, având secţiunea de forma unui trapez isoscel. Acest lucru poate fi realizat în diverse moduri, aşa cum se vede în fig. 28. Ce lăţime trebuie să aibă pereţii laterali ai jgheabului şi sub ce unghi trebuie să fie îndoiţi, pentru ca secţiunea jgheabului să aibă aria maximă (fig. 29)?

Rezolvare

Fie l lăţimea tablei. Lăţimea pereţilor laterali ai jgheabului o vom nota cu x, iar lăţimea fundului jgheabului – cu y. Să introducem încă o necunoscută z, a cărei semnificaţie reiese din fig. 30.

Aria trapezului, care reprezintă secţiunea jgheabului, este:

$$S = \frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2} = \sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}.$$

Problema a fost redusă la determinarea acelor valori ale lui x, y, z pentru care S ia valoarea maximă, în ipoteza că suma 2A + y (adică lăţimea tablei) păstrează o valoare constantă l. Facem următoarea transformare:

• S2 = (y + z)2 (• * + z) (z-2).

Mărimea S2 ia valoarea maximă pentru aceleaşi l valori ale lui x, y şi z ca şi 3S2; această din urmă expresie: poate fi pusă sub formă de produs:

(y + ~) (y + 2) (x + z) (3z – 3r).

Suma acestor patru factori:

y z “l- y z —)- x -j- z 3 x – 3z == 2 y -j- x – 2 /, rămâne constantă. De aceea, produsul lor va fi maxim, atunci când factorii vor fi egali între ei, adică atunci când:

$y + z = x + z$ şi $x + z = 3x - 3z$.

Fig. 27

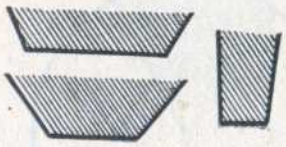


Fig. 28

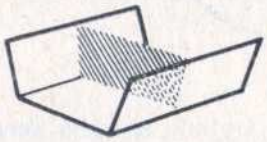


Fig. 29

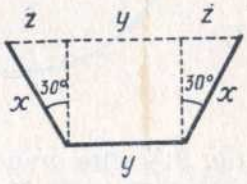


Fig. 30

Deci, obţinem prima ecuaţie:

; j= – şi, deoarece y + 2x – l, rezultă că x = y = ^ •

Din ecuaţia a doua obţinem:

X l 2 6

Mai departe, deoarece cateta z este egală cu jumătatea ipotenuzei x (fig. 30), reiese că unghiul opus acestei catete este egal cu 30°, iar unghiul de înclinare a pereţilor laterali ai jgheabului faţă de fund este egal cu 90° + 30° = 120°.

Deci, jgheabul va avea secţiunea maximă atunci când feţele sale vor fi îndoite după trei laturi alăturate ale unui hexagon regulat.

Pilnia de capacitate maximă

Problemă

Dintr-o tablă circulară trebuie să confecţionăm partea conică a unei pâlnii. În acest scop, vom tăia din tablă un sector, iar partea rămasă o vom îndoi sub formă de con

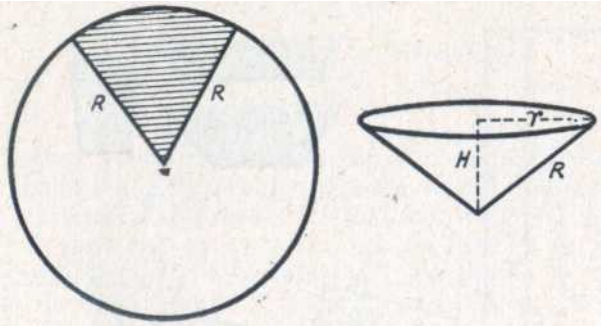


Fig. 31

(fig. 31). Câte grade trebuie să aibă sectorul astfel tăiat, pentru ca acest con să aibă capacitatea maximă?

Rezolvare

Yom nota cu x lungimea arcului corespunzător părţii de cerc care urmează să fie îndoită pentru pâlnie. Prin urmare, generatoarea conului va fi raza Ti a tablei circulare, iar lungimea circumferinţei bazei va fi x. Eaza r a bazei conului se determină din egalitatea:

a;

27tr = x, de unde r =

2tc înălţimea conului (conform teoremei lui Pitagora) va fi:

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

(fig. 31). Volumul acestui con va fi: $V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

Această expresie ia valoarea maximă o dată cu expresia: $\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$

şi cu pătratul ei • $\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right].$

Deoarece $\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$

este o mărime constantă (din cele demonstrate anterior), rezultă că ultimul produs ia valoarea maximă pentru o valoare a lui x care verifică relaţia:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2 : 1,$$

de unde:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \text{ și } x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} \approx 5{,}15\ R.$$

în grade, arcul x «295°, ceea ce înseamnă că arcul sectorului tăiat trebuie să fie de «65°.

Iluminarea maximă

Problemă

La ce înălţime deasupra mesei trebuie să fie aşezată flacăra unei luminări astfel ca ea să lumineze cel mai bine o monedă aflată pe masă?

Rezolvare

S-ar părea că pentru atingerea scopului propus ar trebui ca flacăra să fie cât mai aproape de masă. Dar această presupunere nu este adevărată: atunci când fia- căra este aşezată prea jos, razele cad oblic. Trebuie deci să ridicăm luminarea astfel ca razele să cadă cât mai aproape de verticală, ceea ce înseamnă să îndepărtăm sursa de lumină. În acest caz, înălţimea optimă (din

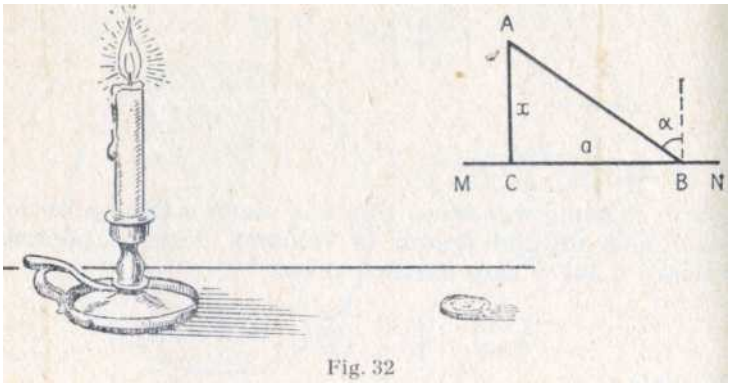


Fig. 32

punctul de vedere al iluminării) va fi o înălţime oarecare 1 medie la care trebuie să se găsească flacăra deasupra i mesei. O vom nota cu x (fig. 32). Distanţa BC, la care se | află moneda B de piciorul C al perpendicularei care trece j prin flacăra A, o vom nota cu a. Dacă strălucirea flăcării j este i, atunci (potrivit legilor opticii) iluminarea monedei; va fi:

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

unde «este unghiul de incidenţă al fasciculului de raze A B. Deoarece

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

iluminarea monedei va fi: $\frac{i}{a^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Această expresie ia valoarea maximă pentru aceeaşi valoare a lui x, ca şi pătratul ei, adică:

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Omitem factorul t2 care este o mărime constantă, iar expresia rămasă o transformăm în felul următor:

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right).$$

Expresia transformată ia valoarea maximă o dată cu expresia:

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right),$$

deoarece factorul constant introdus a4 nu influenţează valoarea lui x pentru care produsul ia valoarea maximă. Observând că suma factorilor la puterea întâia

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} + \left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 1$$

este constantă, deducem că produsul considerat ia valoarea maximă atunci când:

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} : \left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 2:1.$$

Avem ecuaţia:

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2.$$

Eezolvând această ecuaţie, aflăm:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\ a.$$

Moneda va fi iluminată cel mai bine atunci când sursa de lumină se va afla la o înălţime de 0,71 din distanţa între proiecţia sursei şi monedă. Cunoaşterea acestei relaţii ajută la stabilirea celei mai bune iluminări a locurilor de muncă.

CAPITOLUL VIII

PROGRESII

#

Cea mai veehe progresie

Problemă

Cea mai veche problemă eu progresii nu este cea a jocului de şah, cunoscută de două mii de ani, ci una mult mai veche relativă la împărţirea cerealelor, înscrisă în vestitul papirus egiptean Ehind. Acest papirus, descoperit de Ehind la sfârşitul secolului trecut, a fost întocmit cu circa 2 000 de ani înaintea erei noastre, şi este copia unei alte lucrări matematice cu o vechime de aproape 3 000 de ani î.e.n. Printre problemele aritmetice, algebrice şi geometrice cuprinse în acest document, există şi cea de mai jos (o dăm în traducere liberă):

Se cere ca 100 măsuri de cereale să fie împărţite între 5 oameni, astfel, încât cel de-al doilea să primească mai mult decât primul cu atât cu cât cel de-al treilea a primit mai mult decât cel de-al doilea, cel de-al patrulea mai mult decât cel de-al treilea, iar cel de-al cincilea mai mult decât cel de-al patrulea. Afară de aceasta, primii doi trebuie să primească de 7 ori mai puţin decât următorii trei. Cât trebuie să primească fiecare dintre ei?

Rezolvare

Cantitatea de cereale primită de cei interesaţi formează o progresie aritmetică crescătoare. Îfotând primul său termen cu x, iar raţia cu ij, rezultă că:

partea primului om x partea celui de-al doilea. X + g partea celui de-al treilea x + 2y partea celui de-al patrulea x + 3y partea celui de-al cincilea x + 4y.

Tn virtutea enunţului problemei, formăm următoarele două ecuaţii:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100, \\ 7\,[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

După simplificări, prima ecuaţie ia forma:

x + 2 IJ= 20, iar ecuaţia a doua:

1 lx = 2 y.

Eezolvând sistemul, obţinem:

$$x = 1\frac{2}{3}\ ;\quad y = 9\frac{1}{6}.$$

Deci, cerealele trebuie împărţite în următoarele părţi:

$$1\frac{2}{3},\quad 10\frac{5}{6},\quad 20,\quad 29\frac{1}{6},\quad 38\frac{1}{3}.$$

Algebra pe hârtia eu pătrăţele

Cu toate că această problemă cu progresii datează de 50 de secole, în practica şcolară progresiile au început să fie folosite de relativ puţin timp. În manualul lui Magniţki, publicat acum 200 de ani şi care timp de 50 de ani a fost principalul manual folosit în şcolile ruse, deşi există progresii, nu sunt însă date formule generale care să exprime legătura dintre termenii lor. De aceea, însuşi autorul manualului întâmpină greutăţi la rezolvarea problemelor cu progresii. Cu toate

acestea, formula sumei termenilor unei progresii aritmetice poate fi dedusă foarte uşor printr-o metodă simplă, cu ajutorul hârtiei cu pătrăţele. Pe această hârtie, orice progresie aritmetică este reprezentată printr-o figură în scară. De exemplu, figura ABCD (fig. 33) reprezintă progresia:

2; 5; 8; 11; 14.

Pentru aflarea sumei termenilor ei, vom completa figura până la dreptunghiul ABGE. Obţinem două figuri egale ABDG şi DOEG. Aria fiecăreia din ele reprezintă

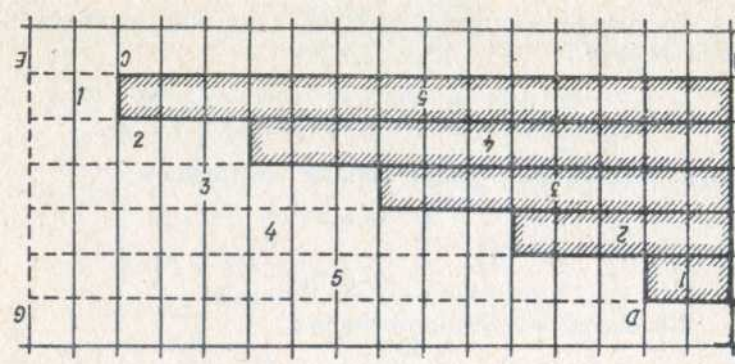


Fig. 33

suma termenilor progresiei noastre. Deci, dublul sumei progresiei este egal cu aria dreptunghiului ABGE, adică:

(AC.+ CE) ■ AB.

Dar AC -f CE reprezintă suma dintre primul şi cel de al cincilea termen ’al progresiei; AB este numărul termenilor progresiei. De aceea, avem:

$$2S = (\text{suma termenilor extremi}) \cdot (\text{numărul termenilor})$$

sau :

$$S = \frac{(\text{primul termen} + \text{ultimul termen}) \cdot (\text{numărul termenilor})}{2}$$

Udarea unei grădini de zarzavat Problemă într-o grădină de zarzavat sunt 30 de straturi, de 16 m lungime şi 2,5 m lăţime fiecare. Pentru a le uda, grădinarul aduce apa cu găleţile de la o fântână situată la o distanţă de 14 m de marginea grădinii (fig. 34) şi ocoleşte straturile de răzoare. Ştiind că apa adusă, de fiecare dată, ajunge pentru udarea unui singur strat, să calculăm cât de lung este drumul pe care trebuie să-l parcurgă grădinarul pentru a uda întreaga grădină. Drumul începe şi se încheie la fântână.

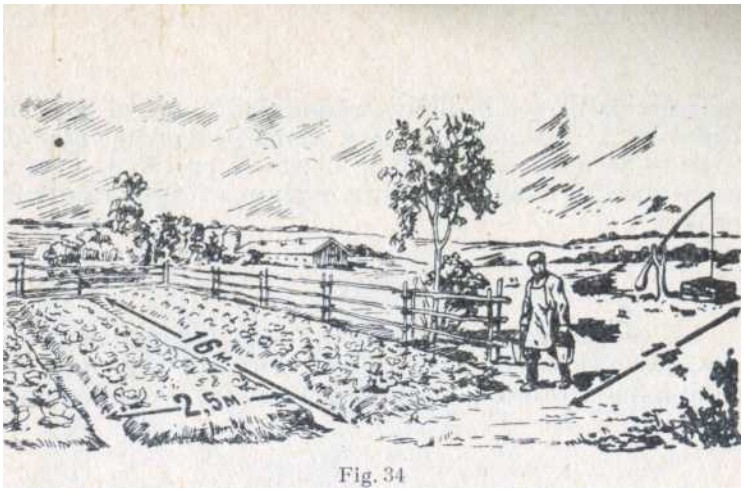


Fig. 34

ltezolvare

Pentru udarea primului strat, grădinarul trebuie să parcurgă un drum de:

14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65 m.

Pentru udarea celui de-al doilea strat, el parcurge:

14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = 65 + 5 = 70 m.

Fiecare din straturile următoare necesită un drum cu 5 m mai lung decât cel precedent. Obţinem progresia:

65; 70; 75;...; 65 + 5 • 29.

Suma termenilor ei este egală cu:

(65 + 65 + 29 -5) -30!: 1— = 4 125 m.

2

Pentru udarea întregii grădini grădinarul parcurge un drum de 4,125 km.

Hrănirea găinilor

Problemă

Pentru 31 de găini a fost pregătită o anumită cantitate de hrană, şi anume câte un decalitru pentru o găină pe săptămână. Să presupunem că numărul găinilor rămâne constant. Deoarece în fiecare săptămână numărul găinilor scădea cu 1, hrana pregătită a ajuns pentru un interval de timp de două ori mai lung decât cel prevăzut. Care a fost rezerva de hrană şi pentru cât timp a fost ea calculată iniţial?

Ilezolvare

Să considerăm că s-au pregătit x dai de hrană pentru y săptămâni. Deoarece hrana a fost calculată pentru 31 de găini a câte 1 dai pe săptămână pentru fiecare găină, rezultă că:

x = 31 y.

În prima săptămână au fost consumaţi 31 dai, în săptămână a doua, 30 dai, în a treia, 29 dai etc., până la ultima săptămână a termenului dublu, când au fost consumaţi:

(31-2y + 1) dai. *

Deci întreaga rezervă a fost de:

x – i\y = 31 + 30 + 29 +... + (31 —2y + 1) dai.

Suma a 2y termeni ai unei progresii, în care primul termen este 31, iar ultimul, 31—2y +1, este egală cu:,

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1)\, 2y}{2} = (63 - 2y)\, y.$$

Deoarece y nu poate fi egal cu zero, putem simplifica ambii membri ai egalităţii eu acest factor. Obţinem:

31 = 63 -2y şi y = 16, de unde:

x = 31 y = 496.

Au fost rezervaţi deci 496 dai de hrană pentru 16 săptămâni.

* Explicaţie: consumul hranei în cursul:

primei săptămâni 31 dai celei de-a doua săptămâni 31—1 dai celei de-a treia săptămâni 31—2 dai celei de-a 2y săptămâni 31 – (2y – 1) = 31 – 2y -f- 1 dai

Fig. 35

Echipa de săpători

Problemă

O echipă de săpători s-a angajat să sape un şanţ. Dacă ea ar fi lucrat cu întregul ei efectiv, şanţul ar fi fost săpat în 24 de ore. În realitate însă lucrarea^a început-o un singur muncitor, căruia după un timp oarecare i s-a asociat un al doilea, după’ tot

atâta timp – al treilea, apoi după acelaşi interval de timp – al patrulea şi aşa mai departe până la ultimul lucrător. La terminarea lucrării s-a constatat că primul a lucrat de 11 ori mai mult decât ultimul.

Cât timp a lucrat ultimul lucrător?

Rezolvare

Să presupunem că ultimul săpător a lucrat x ore; atunci primul a lucrat 11 a? ore. Dacă numărul lucrătorilor din echipă este y, atunci numărul total de ore va reprezenta suma a y termeni ai unei progresii descrescătoare al cărei prim termen va fi 11a?, iar ultimul x, adică: $\frac{(11x+x)y}{2}=6xy.$

Pe de aită parte, se ştie că dacă echipa, compusă din y oameni, ar fi lucrat cu întregul ei efectiv, ea ar fi săpat, şanţul dat în 24 de ore, adică pentru executarea lucrării sunt necesare 24y ore de muncă. Prin urmare:

&xy = 24y.

Numărul y nu poate fi egal cu zero; de aceea, ecuaţia poate fi simplificată cu acest factor, după care obţinem:

Gi = 24 şi x – 4.

Astfel, săpătorul care a început lucrul ultimul, a lucrat 4 ore.

Am răspuns la întrebarea problemei; iar dacă am fi dorit să aflăm câţi lucrători au fost în echipă, n-am fi putut răspunde, cu toate că în ecuaţie acest număr figurează (sub litera y). Pentru a răspunde la această întrebare problema nu furnizează date suficiente.

- Merele

Problemă

Un pomicultor a vândut primului cumpărător jumătate din cantitatea de mere pe care le avea şi încă o jumătate de măr; celui de-al doilea cumpărător – jumătate din merele rămase şi încă o jumătate de măr; celui de-al treilea – jumătate din merele rămase şi încă o jumătate de măr etc. Până la al şaptelea cumpărător, căruia i-a vândut şi lui jumătate din merele rămase şi încă o jumătate de măr, după care pomicultorului nu i-a mai rămas nimic. Câte mere a avut pomicultorul?

Rezolvare

Dacă notăm numărul iniţial de mere cu x, atunci primul cumpărător a cumpărat:

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2},$$

al doilea: $$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2},$$

al treilea:

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3},$$

al şaptelea:

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

Avem ecuaţia: sau

$$(x+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^7}\right) = x.$$

Calculând suma termenilor progresiei, geometrice din paranteze, găsim:

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7} \text{ şi } x = 2^7 - 1 = 127.$$

În total, pomicultorul a avut 127 de mere.

Cumpărarea unui cal Problemă în vechiul manual de aritmetică al lui Magniţki găsim următoarea problemă amuzantă pe care 6 redăm mai jos: Cineva a vândut un cal cu 156 de ruble. Dar cumpărătorul s-a răzgândit şi a restituit vânzătorului calul spunându-i:

— Nu-mi convine să cumpăr calul la acest preţ, nu face atâţia bani!

Atunci vânzătorul i-a propus alte condiţii:

— Dacă găseşti că preţul pentru cal este prea mare, atunci cumpără numai caietele de la potcoavele calului; în acest caz calul îl vei primi pe gratis. Fiecare potcoavă

Fig. 36

are 6 caiele. Pentru prima caia îmi vei da – copeică, pen-

tru a doua, – copeică, pentru a treia, o copeică etc.

Cumpărătorul, ispitit de preţul mic al caietelor şi în dorinţa de a obţine calul gratis, a acceptat condiţiile vânzătorului, socotind că pentru caiele nu va plăti mai mult de 10 ruble.

Cu cât s-a înşelat cumpărătorul?

Rezolvare

Pentru 24 de caiele el a trebuit să plătească: copeici. Această sumă este egală cu:

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2-1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,194\,303\ \frac{3}{4}\ \text{copeici},$$

deci circa 42 000 de ruble. În asemenea condiţii nu este greu să dai un cal drept supliment.

Răsplata ostaşului Problemă

Dintr-un alt manual vechi de matematici cu titlul: „Curs complet de matematică pură, alcătuit de ofiţerul de artilerie şi profesorul particular de matematici Efim VoiţealiovsM spre folosul şi pentru uzul tineretului şi al celor care se ’ocupă de matematici” (1795), reproducem următoarea problemă:

„Pentru serviciile aduse patriei, un ostaş a primit o răsplată: pentru prima rană o copeică, pentru a doua, 2 copeici, pentru a treia, 4 copeici etc. Făcându-se calculul, s-a dovedit că ostaşul a primit în total suma de 655 de ruble şi 35 de copeici. Se întreabă câte răni a avut ostaşul”.

Rezolvare

Formăm ecuaţia: sau:

$$65\,535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2-1} = 2^x - 1,$$

de unde obţinem:

65 536 = 2* şi x = 16, rezultat la care ajungem uşor prin încercări.

La un sistem de recompensă atât de generos, ostaşul trebuie să aibă 16 răni şi să rămână viu ca să obţină o recompensă în valoare de 655 de ruble şi 35 de copeici.

CAPITOLUL IX

A ŞAPTEA OPERAŢIE MATEMATICĂ

9 9

’ *

A şaptea operaţie

Am spus că a cincea operaţie – ridicarea la putere – admite două operaţii inverse. Dacă:

ab = c, atunci aflarea lui a este o operaţie inversă – extragerea rădăcinii; aflarea lui b este a doua operaţie inversă-lo- garitmarea. Se presupune că cititorul cunoaşte bazele 1 teoriei logaritmilor, atât cât se învaţă în şcoala medie, şi: nu constituie pentru el o greutate să înţeleagă cu ’ce este; egală, de pildă, expresia:

alog al>

Este uşor de înţeles că, ridicând baza logaritmilor a la o putere egală cu logaritmul numărului b, vom obţine chiar numărul b.

Pentru ce au fost inventaţi logaritmii? ’Desigur pentru accelerarea şi simplificarea calculelor. Inventatorul primelor table de logaritmi, Neper, vorbeşte astfel despre intenţia sa:

„Am căutat, pe cât mi-a fost posibil, să mă debarasez de greutatea şi plictiseala calculelor, care îndepărtează pe mulţi de matematică”.

Într-adevăr, logaritmii înlesnesc şi accelerează foarte mult calculele, fără să mai vorbim de faptul că ei ne oferă posibilitatea să efectuăm operaţii care, fără ajutorul lor, ar fi cu greu accesibile (extragerea rădăcinii de orice ordin).

Laplace scria, pe bună dreptate, că „inventarea logaritmilor, reducând calcule de mai multe luni la o muncă de câteva zile, parcă a prelungit de două ori viaţa astronomilor”. Marele matematician vorbeşte despre astronomi, deoarece aceştia trebuie să facă calcule deosebit de complicate şi obositoare, dar cuvintele lui pot fi aplicate oricui are de-a face cu calcule numerice.

Noi, care suntem obişnuiţi cu logaritmii şi deci cu simplificările calculelor pe care ni le oferă aceştia, cu greu ne putem închipui mirarea şi admiraţia ce au stârnit tablele de logaritmi la apariţia lor. Contemporanul lui Neper, Briggs, devenit mai târziu celebru prin inventarea logaritmilor zecimali, scria despre opera acestuia: „Datorită noilor şi minunaţilor săi logaritmi, Neper m-a determinat să muncesc fără încetare – şi cu capul şi cu mâinile. Nădăjduiesc să-l văd la vară, fiindcă niciodată n-am citit o carte care să-mi fi plăcut mai mult şi care să mă fi uimit atât”. Briggs şi-a realizat intenţia şi a plecat în Scoţia să-l viziteze pe inventatorul logaritmilor. La întâlnire, Briggs i-a spus:

„Am întreprins această lungă călătorie cu un singur scop: să vă cunosc şi să aflu prin ce mijloace şi prin ce artă aţi ajuns la ideea acestui minunat ajutor pentru astronomie – logaritmii. De altfel, acum mă miră mai mult faptul că nimeni nu i-a găsit mai înainte – atât de simpli par după ce îi cunoşti”.

Rivalii logaritmilor înainte de inventarea logaritmilor, pentru accelerarea calculelor existau tabele cu ajutorul cărora operaţia de înmulţire nu era înlocuită prin adunare, ci prin scădere. La, baza acestor calcule stătea identitatea:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

de adevărul căreia ne putem convinge desfăcând parantezele.

Având la îndemână sferturile pătratelor, se putea afla produsul a două numere fără a se face înmulţirea, ci scăzând din sfertul pătratului sumei acestor numere sfertul pătratului diferenţei lor. Cu ajutorul aceloraşi tabele se putea ridica la pătrat şi extrage rădăcina pătrată a unui număr, iar dacă se foloseau tabelele numerelor inverse se putea simplifica şi operaţia de împărţire. Superioritatea acestor tabele faţă de tabelele de logaritmi constă în aceea că, cu ajutorul lor, se pot obţine rezultate exacte şi nu aproximative. În schimb, tabelele de logaritmi prezintă alte avantaje, mult mai importante din punct de vedere practic. În timp ce cu ajutorul tabelelor sferturilor de pătrate se pot înmulţi numai două numere, logaritmii ne oferă posibilitatea de a afla dintr-o dată produsul oricărui. Număr de factori şi, afară de aceasta, de a ridica un număr la orice putere şi de a extrage rădăcina de orice ordin (întreg sau fracţionar). De exemplu, cu ajutorul tabeleloi sferturilor de pătrate nu putem calcula dobânda compusă.

Cu toate acestea, aceste tabele au continuat să fie publicate şi după apariţia tabelelor de logaritmi. În 1856 a apărut în Franţa o lucrare cu titlul:

Tabela pătratelor numerelor de la 1 până la 1 000 milioane, cu ajutorul căreia putem afla produsul exact al numerelor folosind o metodă simplă, mai comodă decât cu ajutorul logaritmilor. A întocmit-o Alexandre Gossart.’

Această idee se naşte la mulţi oameni, fără ca ei să bănulăscă că ea a fost realizată de mult. Mie mi s-au adresat mai mulţi inventatori ai tabelelor de acest gen, crezând că au inventat ceva nou, şi au rămas foarte uimiţi când au aflat că invenţia lor datează de circa 300 de ani.

Un alt rival al logaritmilor, mai tânăr, sunt tabelele care există în multe îndreptare tehnice. Acestea sunt tabele cumulative care cuprind următoarele rubrici: pătratele numerelor, cuburile, rădăcinile pătrate, rădăcinile cubice, inversele numerelor, lungimile cercurilor şi ariile lor pentru numerele de la 2 la 1 000.

În -multe calcule tehnice, aceste tabele sunt foarte comode, dar ele nu sunt întotdeauna satisfăcătoare, tabelele de logaritmi putând fi folosite pe o scară mult mai largă.

Evoluţia tabelelor de logaritmi

Până nu demult, în şcolile noastre au fost folosite tabele de logaritmi cu 5 zecimale. Astăzi există tabele cu 4 zecimale, deoarece acestea sunt perfect suficiente în calculele tehnice. Însă pentru unele nevoi practice ajung şi mantise cu 3 zecimale.

Ideea că ar fi suficiente mantise mai scurte a fost adoptată relativ recent. Îmi aduc aminte de timpul când în şcolile noastre se foloseau volume groase de logaritmi cu 7 zecimale, care mai târziu au fost înlocuite cu logaritmi cu 5 zecimale. Dar şi logaritmii cu 7 zecimale păreau, la apariţia lor (1794), o inovaţie revoluţionară. Primii logaritmi zecimali, creaţi prin munca matematicianului londonez Briggs (1624), au avut 14 zecimale. După câţiva ani ei au fost înlocuiţi prin tabelele cu 10 zecimale ale matematicianului olandez Adrian Ylacq.

După cum se vede, evoluţia tabelelor de logaritmi a mers de la mantisele cu multe zecimale la mantise mai scurte şi nu s-a terminat nici în zilele noastre, deoarece şi astăzi mulţi oameni nu vor să înţeleagă ideea simplă că precizia calculelor nu poate depăşi precizia măsurătorilor.

Reducerea mantiselor atrage după sine două urmări practice importante: 1) micşorarea considerabilă a volumului tabelelor de logaritmi şi, deci, 2) simplificarea folosirii lor, ceea ce înseamnă accelerarea calculelor care se fac cu ajutorul lor. Logaritmii cu 7 zecimale ocupă circa 200 de pagini de format mare, cei cu 5 zecimale, 30 de pagini de format pe jumătate cât primul; cei cu 4 zecimale ocupă un volum de zece ori mai mic, ei puţind fi cuprinşi în 2 pagini de format mare, iar logaritmii cu 3 zecimale – pe o singură pagină.

Cât priveşte rapiditatea calculelor, s-a stabilit că un calcul efectuat cu ajutorul tabelelor cu 5 zecimale necesită un timp de 3 ori mai mic decât acelaşi calcul efectuat cu tabele cu 7 zecimale.

Curiozităţile logaritmilor

Dacă nevoile de calcul ale vieţii practice şi ale tehnicii pot fi satisfăcute cu ajutorul tabelelor de logaritmi cu 3 şi 4 zecimale, în schimb la dispoziţia cercetătorilor teoreticieni stau tabele cu mai multe zecimale, mai multe chiar decât cele 14 zecimale ale lui Briggs. Un logaritm este în general un număr iraţional şi nu poate fi exprimat exact prin niciun număr de cifre; logaritmii majorităţii numerelor, oricâte zecimale ar avea, sunt daţi aproximativ; – ei sunt cu atât mai precişi cu cât mantisa cuprinde mai multe cifre. Pentru unele lucrări ştiinţifice, logaritmii cu 14 zecimale nu prezintă o precizie suficientă*; dar printre cele 500 de variante de tabele de logaritmi, apărute de la inventarea lor, un cercetător va găsi întotdeauna una care să-l satisfacă. Să luăm, de pildă, tabelele de logaritmi cu 20 de zecimale (pentru numerele de la 2 la 1 200) publicate în Franţa de Callet (1795). Pentru un grup de numere şi mai restrâns există tabele de’ logaritmi cu un număr foarte mare de zecimale – adevărate curiozităţi logaritmice a căror existenţă nici nu este bănuită de mulţi dintre matematicieni.

Iată aceşti coloşi logaritmici: nu este vorba de logaritmi zecimali, ci de cei naturali**:

Tabelele lui Wolfram cu 48 de zecimale pentru nume- rele până la 10 000.

Tabelele lui Sharp cu 61 de zecimale şi, în sfârşit, o supracuriozitate logaritmieă – tabelele lui Adams cu 260 de zecimale.

În acest din urmă caz nu este de fapt vorba de tabele, ■< ci numai de aşa-zişii logaritmi naturali pentru cinci numere:

2, 3, 5, 7 şi 10 şi un multiplicator (cu 260 de zecimale) pentru transformarea lor în logaritmi zecimali. Nu este greu să ne dăm seama că, având la dispoziţie logaritmii acestor 5 numere, putem obţine prin adunare şi înmulţire logaritmii unui întreg şir de numere compuse; de exemplu, log 12 este egal cu suma log 2 -f log 2 -f- log 3 etc.

Printre curiozităţile logaritmice am mai putea cita şi rigla de calcul – „logaritmii de lemn” – dacă acest instrument ingenios n-ar fi devenit pentru tehnicieni o unealtă de calcul tot atât de obişnuită ca sciotul pentru contabili. O dată cu obişnuinţa scade şi sentimentul de. Uimire faţă de acest instrument, care de fapt funcţionează după principiul logaritmilor, deşi nu cere ca cei care îl folosesc să ştie ce este un logaritm.

* Logaritmii lui Briggs nu există decât de la 1 la 20 000 şi de la 90 000 la 101 000.

** Se numesc naturali logaritmii cu baza 2,718… despre care vom vorbi în cele ce, vor urma.

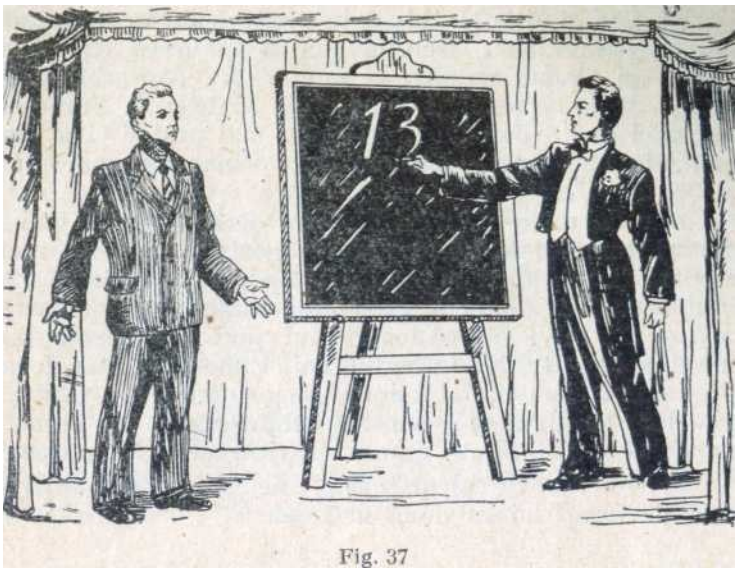


Fig. 37

Logaritmii pe estradă într-un concert de estradă, numărul cel măi izbitor, realizat de calculatori de profesie, este fără îndoială următorul. Fiind anunţaţi prin afişe că un virtuos în arta calculelor va extrage în minte rădăcinile de orice ordin ale numerelor formate din mai multe cifre, vă pregătiţi de acasă, făcând calculele complicate, a 3l-a putere a unui număr oarecare, şi sunteţi decişi să răpuneţi pe calculator cu un colos numeric, compus din 35 de cifre. La momentul oportun vă adresaţi calculatorului cu următoarele cuvinte:

— Încercaţi, vă rog, să extrageţi rădăcina de ordinul 31 din următorul număr format din 35 de cifre! Notaţi, vă dictez. •

Calculatorul ia creta, dar înainte ca dv. Să spuneţi prima cifră, el a şi scris rezultatul: 13.

Fără să cunoască numărul, el a extras din el rădăcina de ordinul 31 şi încă în minte, şi toate acestea cu o viteză fulgerătoare.. ■

Sunteţi uimiţi, şi totuşi în toate acestea nu există j nimic, extraordinar. Secretul constă în aceea că există numai un singur număr, şi anume 13, care ridicat la puterea 31 dă un rezultat compus din 35 de cifre. Numerele mai mici de 13 dan un rezultat cu mai puţine cifre; iar numerele mai mari – un rezultat format din mai mult de 35 de cifre.

Dar de unde ştia calculatorul acest lucru? Cum a aflat el numărul 13? I-au ajutat logaritmii cu două zecimale pe care îi cunoaşte pe dinafară pentru primele 15—20 de numere. Nu estede loc greu de memorat aceste numere, dacă se are în vedere că logaritmul unui produs este egal cu suma logaritmilor factorilor lui. Cunoscând bine logaritmii numerelor doi, trei şi şapte*, se pot cunoaşte logaritmii primelor 10 numere; pentru următoarele 10 numere • trebuie să se ţină minte numai logaritmii a încă 4 numere.

Oricum ar fi calculatorul, ţine minte următoarea tablă de logaritmi cu două zecimale:

Număr	Log	Număr	Log
2	0,30	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,60	13	1,11
5	0,70	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,85	16	1,20
8	0,90	17	1,23
9	0,95	18	1,26
		19	1,28

Trucul matematic care v-a uimit atât a constat în următoarele:

$$\log \sqrt[31]{(35 \text{ de cifre})} = \frac{34, \ldots}{31}.$$

10

* Amintim că logaritmi de 5= log – = 1 – log 2.

Logaritmul căutat poate fi cuprins între:

$$\frac{34}{31} \text{ şi } \frac{34,99}{31} \text{ sau între } 1,09 \text{ şi } 1,13.$$

În acest interval există numai logaritmul unui singur număr între 1,11, logaritmul lui 13. Desigur, pentru ca aceste calcule să poată fi făcute repede în minte, trebuie să existe ingeniozitatea şi îndemânarea unui profesionist; în fond însă lucrurile stau destul de simplu. De acum puteţi face singuri asemenea scamatorii, dacă nu în minte, atunci pe hârtie.

Să presupunem că aveţi de rezolvat problema următoare:

Să se extragă rădăcina de ordinul 64 dintr-un număr format din 20 de cifre.

Fără să cunoaşteţi numărul dat puteţi spune rezultatul: rădăcina este egală cu 2.

6ţ 19...

Într-adevăr, log V (20 de cifre) = jj—; prin urmare

19 19 99

el trebuie să fie cuprins întreg- şi -gj-, adică între 0,29

şi 0,32. Un asemenea logaritm pentru un număr întreg este unul singur: 0,30… adică logaritmul numărului 2.

Puteţi chiar să-l uimiţi pe interlocutorul dv., comu- ■nicându-i ce număr a avut el de gând să vă dicteze: celebrul număr de şah

264 = 18446744073709551616.

Logaritmii în grajd

Problemă

Cantitatea aşa-zisei hrane „de întreţinere” (adică cantitatea minimă necesară pentru înlocuirea caloriilor cheltuite de organism prin funcţionarea organelor interne, refacerea celulelor etc.) este proporţională cu suprafaţa exterioară a corpului animalului. Cunoscând acest fapt, Să se stabilească numărul caloriilor din hrana de întreţinere a unui bou care «întăreşte 420 kg, ţfaiându-se seamă că în aceleaşi condiţii, un bou de 630 kg are nevoie de 13 500 de calorii.

*

Rezolvare

Pentru rezolvarea acestei probleme practice din domeniul creşterii animalelor, este necesar ca pe lângă algebră să apelăm şi la geometrie. Conform enunţului problemei, iiumărul de calorii x este proporţional cu suprafaţa (s) a boului, adică:

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{s}{s_1},$$

unde s1 este suprafaţa corpului boului care cântăreşte 630 kg. Din geometrie ştim că suprafeţele (ariile) (s) ale ’ corpurilor asemenea sunt proporţionale cu pătratele dimensiunilor lor liniare (l), iar volumele (şi deci şi greutăţile) – – cu cuburile dimensiunilor liniare. De aceea:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}, \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}$$

şi deci:

$$\frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$ * *•

de unde:

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}, \quad x = 13\,500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Cu ajutorul tabelelor de logaritmi aflăm:

z= 10 300.

Boul nostru are nevoie de 10 300 de calorii.

Logaritmii în muzică

Muzicienii se interesează rar de matematică; cea mai mare parte dintre ei, acordind stima cuvenită acestei ştiinţe, preferă să stea mai departe de ea. Cu toate acestea, muzicienii – chiar cei care nu verifică, ca Salieri la Ppş- kin, „armonia cu' ajutorul algebrei" – vin în contact cu matematica mult mai des decât îşi închipuie ei şi încă cu lucruri „atât de grozave" cum sunt logaritmii.

Îmi voi permite cu această ocazie să citez un fragment din, articolul regretatului fizician rus, prof. A. Eichenwald*.

„Unui coleg de-al meu de liceu îi plăcea să cânte la pian, dar nu-i plăcea matematica. El spunea cu o iiuanţă de dispreţ că muzica şi matematica nu au nimic comun. «Este adevărat că Pitagora a găsit unele corelaţii între vibraţiile sonore – dar această gamă a lui Pitagora s-a dovedit a fi inaplicabilă muzicii noastre».

Vă închipuiţi cât de surprins a rămas el, când eu i-am demonstrat că, apăsând clapele unui pian modern, el cântă propriu-zis la logaritmi..." Şi, într-adevăr, aşa-zisele „trepte" ale unei game cromatice temperate nu sunt dispuse la distanţe egale, nici în raport cu frecvenţele vibraţiilor, nici în raport cu lungimile de undă ale sunetelor corespunzătoare, ci ele reprezintă logaritmii acestor mărimi. Îs utnai că baza acestor logaritmi este 2 şi nu 10, aşa cum se obişnuieşte în alte cazuri.

Să presupunem că nota de din cea mai joasă octavă – o vom numi octava zero – este determinată de n oscilaţii pe secundă. Atunci notei de din octava I îi corespund 2n oscilaţii pe secundă, iar notei de din octava m, n • 2 oscilaţii pe secundă etc. Să atribuim tuturor notelor gamei cromatice a pianului numere de ordin p, atribuind tonului fundamental de al fiecărei oct., ve numărul zero; atunci, de pildă, tonul sol va fi al 7-lea, tonul la al 9-lea etc.; al

* •

* Acest articol a fost publicat în „Calendarul astronomic rus din 1919" sub titlul Despre distanţe mari şi mici.

12-lea ton va fi din nou de, dar dintr-o octavă superioară. Deoarece în gama cromatică. Temperată orice ton are de

12__

]/ 2 mai multe oscilaţii decât tonul precedent, numărul de oscilaţii al oricărui ton poate fi dat de formula:

$$N_{pm} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)_p.$$

Logaritmând această formulă, obţinem:

log 2

log Npm = log 71 + m log 2 + p —— >

sau:

log ATpm = log 71 + 1 777 + log 2

şi luând ca unitate (n = 1) numărul de oscilaţii ale notei de din cel mai jos registru şi log 2=1, avem:

logj Npm = 777 -f —

• 12

* «

Observăm, deci, că numerele de ordine ale clapelor unui piaii reprezintă logaritmii numerelor de oscilaţii ale sunetelor corespunzătoare*. Putem spune chiar că numărul unei octave reprezintă caracteristica, iar numărul de ordine al sunetului în octava dată** —mantisa logaritmului. Astfel, de exemplu, dacă luăm nota sol din octava a

. 7

treia, atunci în expresia corespunzătoare 3 3,583)

numărul 3 este caracteristica logaritmului numărului de

7

oscilaţii al notei date, iar – (ss 0,583) —mantisa aceluiaşi logaritm cu baza 2; prin urmare numărul de oscilaţii este de 23,588, adică de 11,98 ori mai mare decât numărul de oscilaţii al tonului de din prima octavă.

* Îi77iiulţite cu 12.

** împărţit la 12.

Stelele, zgomotul şi logaritmii

Acest titlu, care leagă lucruri atât de diferite, n-are pretenţia să fie o parodie la operele lui Cuzma Prutkov; va fi vorba într-adevăr de stele şi de zgomot în strânsă legătură cu logaritmii.

Aci zgomotul şi stelele stau alături, deoarece intensitatea sunetului şi strălucirea stelelor sunt evaluate în acelaşi fel – după o scară logaritmică.

Astrononiii clasifică stelele, după gradul lor de strălucire aparentă, în: stele de prima magnitudine aparentă, a doua magnitudine aparentă, a treia etc. Magnitudinile’ aparente consecutive sunt percepute de ochi că termenii unei progresii aritmetice. Dar strălucirea fizică a stelelor variază după o altă lege: strălucirile obiective formează o progresie geometrică cu raţia 2,5. Este uşor de înţeles că", „magnitudinea” unei stele nu este altceva decât logaritmul strălucirii ei fizice. Astfel, o stea de-a treia magnitudine aparentă este mai strălucitoare decât una din prima magnitudine aparentă de 2,53 1 ori, adică de 6,25 ori. Sau mai pe scurt, evaluând strălucirea aparentă a stelelor, astronomii operează cu tabele de logaritmi

cu baza 2,5. Au ne vom opri aici prea mult asupra acestor corelaţii interesante, deoarece le-am consacrat destule- pagini în Astronomia distractivă*.

În mod asemănător se evaluează şi intensitatea zgomotului. Efectul dăunător al zgomotelor industriale asupra sănătăţii muncitorilor şi asupra productivităţii muncii a determinat elaborarea unor procedee pentru evaluarea cantitativă a intensităţii zgomotelor. Unitatea pentru măsurarea intensităţii sunetului este belul, iar în mod practic – decibelul (1/10 dintr-un bel). Gradele consecutive de tărie a sunetului – 1 bel, 2 beli etc. (practic 10 decibeli, 20 decibeli etc.) – reprezintă pentru urechea noastră o progresie aritmetică. Iar „intensitatea" fizică a acestor zgomote (sau mai precis energia) formează o progresie geometrică cu raţia 10. Unei diferenţe de 1 bel îi corespunde o creştere de 10 ori a energiei zgomotului. Deci, tăria zgomotului, exprimată în beli, este egală cu logaritmul zecimal al energiei lui fizice.

* I, I. Perelman, Astronomia distractivă, Editura Tineretului, 1959.

Lucrurile vor deveni mai clare dacă le vom ilustra cu câteva exemple. Freamătul uşor al frunzelor este evaluat, la 1 bel 5 o discuţie cu glas tare – la 6,5 beli; răcnetul unui leu – la 8,7 beli. De aici reiese că, în ceea ce priveşte intensitatea sunetului, graiul omenesc întrece freamătul frunzelor de:

106.5-1 = 104.5= 316 000 ori;.

Iar răcnetul unui leu este mai tare decât graiul omenesc de:

108.7-6,5 = 102.2 = 158 ori.

Un. Zgomot care întrece 8 beli este considerat ca dăunător pentru organismul omenesc. În multe uzine norma indicată este întrecută, există sunete de 10 beli şi mai mult; loviturile unui ciocan într-o tablă de oţel ’ produc un zgomot de 11 beli. Aceste zgomote întrec de 100 şi 1 000 de ori norma admisibilă şi sunt de 10—3 00 ori mai intense decât zgomotul cascadei A ia gara (9 beli).

Oare este o coincidenţă faptul că la evaluarea strălucirii aparente a stelelor şi la-măsurarea tăriei sunetului avem de-a face cu dependenţa logaritmică între intensitatea senzaţiei şi mărimea excitaţiei care a generat-o? Ku, atât prima cî, t şi a doua sunt urmare a unei legi generale (numită „legea psihofizică a lui Fechner"), care sună astfel: intensitatea senzaţiei este proporţională cu logaritmul mărimii excitaţiei.

După• cu n observăm, logaritmii pătrund şi în domeniul psib logiei.

Logaritmii în iluminatul electric

Problemă

Faptul că becurile care au acelaşi filament metalic umplute cu gaz dau o lumină mai strălucitoare decât becurile’ cu vid, se explică prin temperatura diferită a filamentului în aceste două condiţii. După cum se ştie din fizică., cantitatea totala de lumină radiată la incandescenţă creşte proporţional cu puterea a 12-a-a temperaturii absolute. Cunoseând acest fapt, facem următorul calcul: să stabilim de câte ori un bec „cu gaz", la care temperatura filamentului este egală, în scara

absolută, cu 2 500° (adică socotind de la —273°C), radiază mai multă lumină decât un bec eu vid, cu temperatura filamentului de 2 200°.

Rezolvare

Notând raportul căutat cu x, avem ecuaţia: de unde $x = \left(\frac{2\,500}{2\,200}\right)^{12} = \left(\frac{25}{22}\right)^{12}$.

logx = 12t (log 25 – log 22); x = 4,6.

Becul cu gaz radiază de 4,6 ori mai multă lumină decât cel cu vid. Deci, dacă un bec cu vid dă o lumină de 50 de lumânări, în aceleaşi condiţii becul cu gaz va da o lumină de 230 de luminări.

Să facem încă un calcul: cu cât trebuie să crească temperatura absolută (în procente) pentru ca strălucirea unui bec să devină de două ori mai mare?

Rezolvare

Formăm ecuaţia: de unde: $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2$

$\log\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{\log 2}{12}$ şi $x = 6\%$.

în sfârşit, al treilea calcul: cu cât va creşte (în procente) strălucirea unui bec dacă temperatura absolută a filamentului ei va creşte cu 1%?

Rezolvare

Efectuând calculul (cu ajutorul logaritmilor)

z=l, oi12, găsim:

x = 1,13.

Strălucirea creşte cu 13%.

Dacă facem calculul pentru creşterea temperaturii cu 2%, aflăm că strălucirea creşte cu 27%; în cazul creşterii temperaturii cu 3% – strălucirea va creşte cu 43%.

De aici reiese clar de ce în tehnica fabricării becurilor electrice se caută atât de mult să se obţină creşterea temperaturii filamentului, preţuindu-se fiecare grad câş-tigat.

Testamente de sute de ani

Cine n-a auzit de acel număr legendar de grăunţe de grâu, pe care l-ar fi cerut drept recompensă inventatorul jocului de şah? Acest număr se obţine prin dublarea consecutivă a unităţii: pentru primul câmp s-a cerut 1 grăunte, pentru câmpul al doilea, 2 grăunţe etc., mereu dublând până la ultimul, al 64-lea câmp.

Dar numerele cresc vertiginos nu numai la dublarea lor consecutivă, ci şi la o normă de creştere mult mai moderată. Un capital care aduce 5% creşte anual de 1,05 ori.

S-ar părea că creşterea nu este prea mare. Cu toate acestea, după trecerea unui interval de timp destul de lung, capitalul ajunge la o sumă imensă. Prin aceasta se explică creşterea uimitoare a capitalurilor lăsate cu testament pe un timp lung. Pare curios că lăsând o sumă destul de modestă, testatorul dispune de repartizarea unor capitaluri imense. Este cunoscut testamentul lui Benjamin Franklin, publicat în Culegerea diverselor opere ale lui B. Franklin. Iată un extras din acest testament:

„Las 1 000 de lire locuitorilor din Boston. Primind această mie de lire ei o vor încredinţa celor mai onorabili cetăţeni, iar aceştia la rândul lor o vor da cu dobândă, cu 5% pe an, tinerilor meseriaşi*. Peste 100 de ani această sumă va creşte până la 131 000 de lire. Doresc ca atunci, cele 100 000 de lire să fie întrebuinţate pentru construcţii de clădiri publice, iar restul de 31 000 să fie date cu dobândă pe 100 de ani. După trecerea celui de-al doilea secol suma va creşte până la 4 061 000 de lire, din care 1 060 000 las la dispoziţia locuitorilor din Boston, iar 3 000 000 – obştei

* în acea epocă în America nu existau instituţii de credit.

Din Massachusetts. Mai departe nn îndrăznesc să-mi extind planurile”.

Lăsând în total 1 000 de lire, Franklin repartizează milioane. Dar aici nu există niciun fel de confuzie. Calculul matematic demonstrează că sunt întru totul reale considerentele testamentului. Crescând anual de 1,05 ori, peste 100 de ani 1 000 de lire vor deveni:

* = 1 000 -l^100 lire.

Această expresie poate fi calculată cu ajutorul logaritmilor:

log x = log 1 000 + 100 log 1,05 = 5,11893, de unde:

x = 131 ooo ceea ce corespunde testamentului. Mai departe, în următorii 100 de ani, 31 000 de lire se vor transforma în:

y = 31 ooo • 1,05100, de unde:

y = 4 076 500

— Suma care diferă puţin de cea indicată în testament.

Propun cititorului să rezolve el singur problema de mai jos extrasă din Domnii Golovliov de Saltâkov-Şcedrin: Porfirii Vladimirovici stă în cabinetul lui umplând coli de hârtie cu calcule numerice. De data aceasta îl preocupă următoarea problemă: câţi bani ar fi avut el acuma, dacă mama lui nu şi-ar fi însuşit cele 100 de ruble dăruite lui la naştere de bunicul său, şi ar fi pus aceşti bani la muntele de pietate pe numele minorului Porfirie? Rezultă, totuşi, destul de puţin: în total 800 de ruble”.

Presupunând că la data calculului efectuat Porfirii avea 50 de ani, şi admiţând că el a efectuat corect calculul (ceea ce este puţin probabil, deoarece e îndoielnic că Golovliov cunoştea logaritmii şi ştia să calculeze dobânda compusă), se cere să se stabilească ce dobândă se plătea pe atunci în instituţiile de credit.

Creşterea continuă a capitalului

La casele de depuneri banii proveniţi din dobândă ■se adaugă anual la capitalul de bază. Dacă dobânda se adaugă la capital mai des, acesta creşte mai repede, deoarece dobânda se calculează la o sumă mai mare. Să luăm un exemplu simplu, pur teoretic. Să presupunem că la Casa de Depuneri au fost depuse 100 de ruble cu 100% anual. Dacă banii din dobândă vor fi adăugaţi la capitalul de bază după un an, atunci cele 100 de ruble vor deveni 200. Să vedem ce vor deveni cele 100 de ruble dacă dobânda ar fi adăugată la capital la fiecare şase luni:

100 • 1,5 = 150 ruble, şi după încă 6 luni:

100 • 1,5 = 225 ruble.

Adăugând dobânda la capital la fiecare 1/3 de an, după. Un an cele 100 ruble vor deveni:

100 | 1 • – J’^; 237,03 ruble.

Micşorând termenele de adăugare a dobânzii la 0,1 – ani, 0,01 ani, 0,001 ani etc., peste un an cele 100 de ruble vor deveni:

100 ruble • 1,110 25 259,37 ruble 100 ruble • 1, Ol100 Ss 270,48 ruble,

100 ruble • l. OOl1000^ 271,69 ruble.

Prin metodele matematicii superioare se demonstrează • că dacă reducem nelimitat termenele de adăugare a do-] bânzii, atunci capitalul nu va creşte la infinit, ci se apropie vde o limită anumită, egală aproximativ* cu:

271,83 ruble.

Mai mult decât de 2,7183 ori un capital depus cu 100% nu poate să crească chiar dacă dobânda s-ar adăuga la capital în fiecare secundă.

* Am neglijat submultiplii rublelor.

Numărul „e”

Numărul obţinut 2,718.. Care joacă în matematica superioară un rol uriaş – nu mai puţin important ca vestitul număr -k – se notează cu e. Acest număr este iraţional: el nu poate fi exprimat printr-un număr finit de cifre*, dar poate fi calculat cu o aproximaţie oricât de bună cu ajutorul următoarei serii:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

Din exemplul de mai sus, în care a fost vorba de creşterea capitalului depus cu o dobândă compusă, rezultă că numărul e este limita expresiei:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

când n creşte la infinit.

Din mai multe motive, pe care nu le putem expune aici, este foarte convenabil să se ia numărul e drept baza unui sistem de logaritmi. Asemenea tabele (de „logar îmi naturali”) există şi au multe aplicaţii în ştiinţă şi tefinică. Logaritmii – coloşi, formaţi din 48, din 61, din 102 şi din 260 de cifre – despre care am vorbit, au ca bază pe e.

Numărul e apare adeseori acolo unde nici nu ne aşteptăm. Să punem, de exemplu, următoarea problemă:

Cum trebuie descompus într-o sumă un număr dat a pentru ca produsul tuturor termenilor să fie maxim?

Ştim că la o sumă constantă mai multe numere vor da produsul maxim atunci când factorii sunt egali între ei. Devine clar că numărul a trebuie împărţit în părţi egale. Dar în câte anume părţi egale? în două, în trei, în zece? Cu ajutorul metodelor matematicii superioare se poate stabili că cel mai mare produs se obţine atunci când factorii se apropie cel mai mult de numărul e.

De pildă, 10 trebuie să fie descompus într-un număr de părţi egale, astfel ca ele să fie cât mai apropiate de

" în afară de aceasta, numărul e, ca şi numărul tt, este un număr transcendent, adică el nu poate fi obţinut prin rezolvarea unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi.

Numărul 2,718... Pentru aceasta este necesar să aflăm citul:

$$\frac{10}{2{,}718\ldots} = 3{,}678\ldots$$

Deoarece nu putem descompune un număr în 3,678... părţi egale, suntem nevoiţi să alegem numărul întreg cel mai apropiat, 4. Prin, urmare, vom obţine cel mai mare produs al părţilor atunci când acestea vor fi egale cu—>

4

adică cu 2,5.

Deci

(2,5)4 = 39,0625

este cel mai mare număr care poate fi obţinut prin înmulţirea unor părţi egale ale numărului 10. Într-adevăr, dacă descompunem numărul 10 în 3 sau în 5 părţi egale, obţinem produse mai mici:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37\,;\left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32.$$

În cazul numărului 20, ca să obţinem produsul maxim trebuie să-l descompunem în 7 părţi egale, deoarece:

20: 2,718... = 7,36 7.

În aceleaşi condiţii, numărul 50 trebuie descompus în 18 părţi egale, iar 100 în 37 de părţi egale:

50: 2,718... = 18,4,

100: 2,718... = 36,8.

Numărul e joacă un rol imens în matematică, fizică, astronomie şi alte ştiinţe. Iată unele probleme care, la analizarea lor matematică, reclamă folosirea numărului e (lista poate fi extinsă oricât de mult):

Formula barometrică (scăderea presiunii cu înălţimea). Formula lui Euler *.

* Vezi despre această formală în articolul „Voinicul lui Jules Verne şi formula lui Euler” în cartea a doua din Zanimitelnoi fiziki (Fizica distractivă) de I. I. Perelman.

Legea răcirii corpurilor.

Dezintegrarea radioactivă şi vârsta Pământului. Oscilaţiile pendulului în aer.

Formula lui Ţiolkovski pentru viteza unei rachete. * Fenomene oscilatorii într-un circuit de radio, înmulţirea celulelor.

Farsa logaritmică

Problemă

Yom adăuga la farsele matematice, pe care cititorul le-a cunoscut în Cap. V, încă una, şi anume „demonstrarea” inegalităţii 2 >3. Dedata aceasta demonstraţia o vom face cu ajutorul logaritmilor. Farsa începe cu inegalitatea incontestabilă:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

după care urmează transformarea:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

care nici ea nu poate fi pusă la îndoială. Unui număr mai mare îi corespunde un logaritm mai mare, deci:

$$2 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 3 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right).$$

După simplificare cu log10 jij avem:2 >3. În ce a constat greşeala acestei demonstraţii?

Rezolvare

Greşeala constă în aceea că, făcând simplificarea cu logic |, ; J> noi nu am schimbat semnul inegalităţii (>în<);

* Vezi cartea autorului Mefplanetntie puteşestoia (Călătoriile interplanetare).

Or, acest lucru era absolut necesar, deoarece log10 | ^ j este un număr negativ. (Dacă am fi calculat cu logaritmi în altă bază decât 10, mai mică decât, atunci log j-^-j ar fi fost pozitiv, dar în acest caz n-am fi îndreptăţiţi să afirmăm că unui număr mai mare îi corespunde un logaritm mai mare).

Orice număr exprimat cu ajutorul a trei cifre de doi

Yom încheia cartea cu un truc algebric ingenios, cu care s-au distrat participanţii la un Congres de fizică ţinut la Odessa. Se pune problema: să se exprime orice număr întreg şi pozitiv dat cu ajutorul a trei cifre de doi şi al unor simboluri matematice.

Rezolvare

Să vedem cum se rezolvă această problemă într-un caz particular. Fie numărul 3. Atunci problema se rezolvă astfel:

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Este uşor să ne convingem de exactitatea acestei egalităţi. Într-adevăr:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}},$$

$$\log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3}, \quad -\log_2 2^{-3} = 3.$$

Dacă numărul dat ar fi fost 5, am fi rezolvat problema prin aceeaşi metodă:

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

După cum se vede, ne bazăm pe faptul că la un radical pătrat nu se scrie indicele radicalului.

Soluţia generală a problemei este următoarea. Dacă numărul dat este N, atunci:

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{\text{de } N \text{ ori}},$$

numărul radicalilor fiind egal cu numărul unităţilor cuprinse în numărul dat.